TENTAMEN I SF1851 OPTIMERINGSLÄRA FÖR E.

21 OKTOBER, 2010 KL. 1400-1900

Examinator: Amol Sasane (Tel: 790 7320)
Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.
Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

För godkänt krävs 25 poäng. Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1.(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

---

(1) (a) Lös optimeringsproblemet

$$\begin{cases} \text{minimera} & (x_1-2)^2+x_2^2 \\ \text{sådana att} & x_1^2+x_2^2=1 \end{cases}$$

genom att använda Lagrangemultiplikatormetoden.

(5 poäng)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(\text{P}): \begin{cases} \text{minimera} & x_1+2x_2+3x_3+\dots+2010x_{2010} \\ \text{sådana att} & x_1 \geq 1 \\ & x_1+x_2 \geq 2 \\ & x_1+x_2+x_3 \geq 3 \\ & \vdots \\ & x_1+x_2+x_3+\dots+x_{2010} \geq 2010 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \dots,\ x_{2010} \geq 0. \end{cases}$$

Kontrollera att vektorn

$$\widehat{x} = 2010e_1 := \begin{bmatrix} 2010 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2010}$$

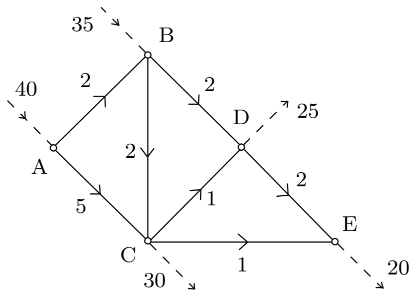
är tillåten för (P).
Bestäm det duala linärprogrammeringsproblemet (D) till det primala problemet (P).
Kontrollera att vektorn

$$\widehat{y} = e_{2010} := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2010}$$

är tillåten för problemet (D).
Använd dualitetsteori för att förklara varför $\widehat{x}$ är en optimal lösning till (P).

(4 poäng)

(2) Betrakta minkostnadsflödesproblemet för nätverket som visas nedan.

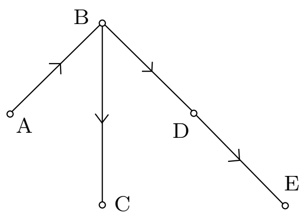


Vi har betecknat de 5 noderna A, B, C, D, E. Noderna A och B är källnoder med ett inflöde av 40 respektive 35 enheter, medan noderna C, D och E är sänknoder med utflöden 30, 25 respektive 20 enheter. Bredvid varje riktad sida har vi indikerat kostnaden c_{ij} per enhetsflöde.

(a) Förklara varför det inte kan finnas mer än $\binom{7}{4} = 35$ uppspännande träd för detta nätverk. Rita två olika uppspännande träd för nätverket.

(3 poäng)

(b) Hitta en optimal lösning och den optimala kostnaden för minkostnadsflödesproblemet ovan. Starta med den tillåtna baslösning som ges av det uppspännande trädet nedan.



(7 poäng)

(3) (a) Avgör om matrisen $H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ är positivt semidefinit.

(2 poäng)

(b) Hitta en bas för nollrummet till A, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2 poäng)

(c) Lös följande kvadratiska optimeringsproblem genom att använda nollrumsmetoden:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \\ \text{sådana att} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

(3 poäng)

(d) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \log(1 + e^{2x}) - x$ for $x \in \mathbb{R}$. Visa att $f''(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Om $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ är följden av punkter som genereras av Newtons metod för att hitta en global minpunkt till f, så visa att $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\sinh(2x^{(k)})$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ där för ett reellt θ, $\sinh\theta := (e^{\theta} - e^{-\theta})/2$.
Visa att om begynnelseunkten är sådan att följden $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ är konvergent, så måste gränsvärdet av följden vara 0.

(3 poäng)

(4) (a) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Visa att värdemängden till f med definitionsmängden $\mathbb{R}^3$ inte är nedåt begränsad. *Ledning:* Betrakta en kurva $t \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^3$ sådan att $f(p(t)) \to -\infty$ då $t \to \infty$.

Verifiera att gradienten av f i punkterna $u := (0, 0, 0)$ och $v := (1, 1, 1)$ är noll. Är u eller v ett lokalt minimum för f? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(\mathrm{LP}) : \begin{cases} \text{minimera} & 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 \\ \text{sådana att} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Använd simplexmetoden för att lösa linjärprommeringsproblemet (LP). Börja med x_1 och x_5 som basvariablerna.

(5 poäng)

(5) Betrakta följande problem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 \\ \text{sådana att} & x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1. \end{cases}$$

(a) Är det tillåtna området en konvex mängd? Är problemet ett konvext optimeringsproblem? Skissa den tillåtna mängden, och skissa följande nivåkurvor i samma figur

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 = V\}$$

för $V = -3$, $V = 0$ och $V = 1/4$.

(6 poäng)

(b) Skriv ner KKT-villkoren som hör till detta optimeringsproblem, och verifiera att punkten $\widehat{x} := (1, 0)$ uppfyller dem. Är $\widehat{x}$ en optimal lösning till problemet? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

Slut på tentamen.