TENTAMEN I SF1851 OPTIMERINGSLÄRA FÖR E.

13 JANUARI, 2011 KL. 0800-1300

Examinator: Amol Sasane (Tel: 790 7320)
Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.
Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

För godkänt krävs 25 poäng. Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1.(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

---

(1) (a) Betrakta problemet

$$\begin{cases} \text{minimera} & (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+e^{x_3} \\ \text{sådana att} & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Kontrollera att målfunktionens Hessian är positivt definit i alla punkter i $\mathbb{R}^3$.
Börja med $x^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^3$, och genomför en iteration med Newtons metod för att hitta den nya punkten $x^{(1)}$.
Kommer följden $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ som fås fram i detta exempel från Newtons metod konvergera? Om ja, till vilken punkt konvergerar den? Om inte, förklara varför inte.

(5 poäng)

(b) Betrakta A som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hitta en bas för nollrummet till A och en bas för bildrummet till A.

(4 poäng)

(2) (a) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem (P):

$$(\mathrm{P}):\begin{cases}\text{minimera} & c^\top x\\ \text{sådana att} & Ax=b,\\ x\geq 0,\end{cases}$$

där

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\-1&0&1&1&0&0&0\\0&-1&-1&0&1&1&0\\0&0&0&-1&-1&0&1\\0&0&0&0&0&-1&-1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}40\\35\\-30\\-25\\-20\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}2\\5\\2\\2\\1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Från matrisen A:s och b:s speciella struktur, följer det att problemet (P) är ett balanserat nätverksflödesproblem. Rita motsvarande nätverk.
Kontrollera att

$$\widehat{x}=\begin{bmatrix}40&0&50&25&0&20&0\end{bmatrix}^\top$$

är en optimal lösning till problemet (P) genom att använda metoden för att lösa balanserade nätverksflödesproblem.

(7 poäng)

(b) Skriv ner det duala problemet (D) för linjärprogrammeringsproblemet (P) ovan.

(3 poäng)

(3) (a) Bestäm om matrisen

$$H:=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

är positivt semidefinit.

(2 poäng)

(b) Verifiera att $\widehat{x}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^\top$ är en optimal lösning till följande kvadratiska optimeringsproblem genom att använda Lagranges metod:

$$\begin{cases}\text{minimera} & x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1\\ \text{sådana att} & x_1+2x_2+3x_3=6\\ & 3x_1+2x_2+x_3=6.\end{cases}$$

(3 poäng)

(c) Antag att C är en konvex delmängd av $\mathbb{R}^n$. Vad betyder det när man säger att $f:C\to\mathbb{R}$ är en konvex funktion?

(2 poäng)

(d) Betrakta funktionen $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ som ges av

$$\varphi(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Är φ en konvex funktion? Motivera ditt svar.

(3 poäng)

(4) (a) Betrakta funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 - 12x_1x_2 + x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Hitta alla lokala minimipunkter till g i $\mathbb{R}^2$. Motivera ditt svar.

(5 poäng)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(\mathrm{LP}) : \begin{cases} \text{minimera} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ \text{sådana att} & 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 18 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Använd simplexmetoden för att lösa linjärprogrammeringsproblemet (LP). Börja med den tillåtna baslösningen $x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

(5 poäng)

(5) Betrakta följande problem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^4 + x_2^4 \\ \text{sådana att} & x_1^2 \leq 1, \\ & x_2^2 \leq 1, \\ & e^{x_1+x_2} \leq 1. \end{cases}$$

(a) Är den tillåtna mängden en konvex mängd?
Är målfunktionen en konvex funktion?
Är problemet ett reguljärt konvext optimeringsproblem? Motivera ditt svar.

(6 poäng)

(b) Skriv ner KKT-villkoren som associeras med detta optimeringsproblem.
Hitta alla globala optimala lösningar till problemet. Motivera ditt svar.

(5 poäng)

Slut på tentamen.