KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Tisdag 24 maj 2011 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

---

1. (a) I denna uppgift är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till A, dvs till $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^T), \mathcal{N}(A)$ och $\mathcal{N}(A^T)$. .... (5p)

(b) Skriv det linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - 3x_3 \\ \text{då} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}\right],$$

på standardform. .... (2p)
(Notera teckenkravet på x_1 i (P))

(c) Antag att x är en tillåten punkt till optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

och att y är en tillåten punkt till det duala optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & b^T y \\ \text{då} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Visa att $c^T x \geq b^T y$ måste gälla i så fall. .... (2p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P_a) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 + x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array}\right].$$

Avgör om någon av basindexmängderna $\beta = \{1, 2\}$ och $\beta = \{2, 3\}$ svarar mot en tillåten baslösning .... (2p)

(b) Lös problemet (P_a) i (a) med simplexalgoritmen. .... (4p)

(c) Bestäm en lösning till problemet

$$(P_b) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_4 + x_5 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array}\right].$$

Är lösningen unik ? .... (4p)

3. (a) Bestäm, om möjligt, LDL^T-faktoriseringen för den symmetriska matrisen

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Är H positivt definit ? .... (3p)

(b) Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax = b \end{array}\right],$$

där H är som i (a) och A, b, c ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avgör om (P) är ett konvext optimeringsproblem och bestäm en optimal punkt till optimeringsproblemet (P) om en sådan existerar. .... (4p)

(c) Bestäm lösningen till (P) med hjälp av Lagrangemetoden.
Om du har bestämt lösningen i (b) är det tillåtet att använda resultatet där för att underlätta beräkningarna. .... (3p)

4. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right]$$

där $f(x) = x_1 x_2^2 + e^{-x_1}$.

(a) Bestäm alla punkter som uppfyller första ordningens optimalitetsvillkor.
Vad kan man säga om dessa punkter genom att använda andra ordningens optimalitetsvillkor ?
Är detta ett konvext optimeringsproblem ? .... (5p)

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (1, 0)$ och använd Newtons metod för att bestämma nästa iterationspunkt. Använd backstepping, om nödvändigt, för att garantera att målfunktionen minskar till nästa iterationspunkt. ....(3p)

(c) Om vi lägger till bivillkoret $h(x) = 0$, där $h(x) = x_2 - e^{x_1} - x_2^2 + 3/4$, till problemet (P), finns det då någon punkt (x_1, x_2) där $x_1 = 0$ som uppfyller Lagrange-villkoren. .... (3p)

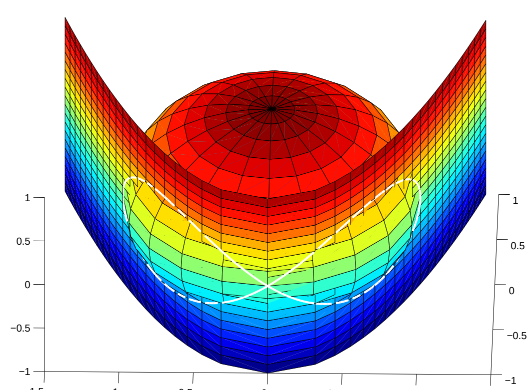
5. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1 \\ & x_1^2 - 1 \le x_2 \\ & x \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right]$$

där $f(x) = 2x_1^2 - 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$,

(a) Är målfunktionen konvex ?
Är det tillåtna området konvext ?
Är detta ett konvext optimeringsproblem ?
Motivera dina svar. ....(3p)

(b) Man kan visa för detta problem att det inte finns några lokala minpunkter sådana att båda bivillkoren är aktiva. (Ni behöver inte göra detta)
Bestäm en punkt sådan att KKT-villkoren är uppfyllda. Kan vi säga att det är en global minpunkt ? Motivera noga. .... (7p)



Lycka till!