KTH Mathematics

Lösningsförslag till tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Tisdag 24 Maj 2011 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

---

1. (a) Utför radoperationer på A tills vi erhåller matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Då ser vi att bildrummet till A kommer att spännas upp av kolumn 1 och 3, dvs

$$\mathcal{R}(A) = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix})$$

Bildrummet till A^T spänns av raderna i U, dvs

$$\mathcal{R}(A^T) = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

Nollrummet till A spänns av

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Utför radoperationer på A^T tills vi erhåller matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Då ser vi att nollrummet till A^T spänns av

$$\mathcal{N}(A^T) = \text{span}(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

(b) Problemet (P) kan skrivas på standardform

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right]$$

där

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr} -1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right], \quad c = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right]^T.$$

Vi lägger alltså till en surplusvariabel till bivillkor ett och en slackvariabel till bivillkor två. För att få icke-negativa variabler så byter vi tecken på x_1 överallt.

(c) Se beviset av Proposition 6.1 sid 52 i OK.

2. (a) Sätter vi $x_3 = 0$ blir $x_1 = 2$ och $x_2 = -3$, vilket inte är en tillåten baslösning. Sätter vi $x_1 = 0$ blir $x_2 = 1$ och $x_3 = 2$, vilket är en tillåten baslösning.

(b) Vi börjar med variablerna x_2 and x_3 i basen, d.v.s. $\beta = \{2, 3\}$ och $\nu = \{1\}$ från (a).

$$A_\beta = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], A_\nu = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right]$$

Då ger ekvationerna $A_\beta^T y = c_\beta$ och $r_\nu^T = c_\nu^T - y^T A_\nu$ att

$$y = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right], \quad r_\nu^T = \left[\begin{array}{c} 1 - 5 = -4 \end{array} \right].$$

Låt x_1 gå in i basen. Vilken variabel ska lämna basen ?
Från $A_\beta \bar{a}_1 = a_1$, får vi $\bar{a}_4 = (2, 1)^T$, och eftersom $\bar{b} = [1,\ 2]^T$, och $1/2 \leq 2/1$ så måste den första basvariabeln, nämligen x_2, lämna basen.
Nu är $\beta = \{1, 3\}$ och $\nu = \{2\}$, och vi uppdaterar bas- och ickebasmatriser:

$$A_\beta = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right], A_\nu = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

Nu ger ekvationerna $A_\beta^T y = c_\beta$ och $r_\nu^T = c_\nu^T - y^T A_\nu$ att

$$y = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right], \quad r_\nu^T = \left[\begin{array}{c} 2 - 0 \end{array} \right].$$

Eftersom alla reducerade kostnader är positiva så är den aktuella baslösningen $\hat{x} = (1/2, 0, 3/2)^T$ optimal.

(c) Notera att (P_b) är fas I problemet som svarar mot (P_a). Lösningarna $(0, 1, 2, 0, 0)$ och $(1/2, 0, 3/2, 0, 0)$ från ovan, med $x_4 = x_5 = 0$, som ger optimalvärdet 0 är alltså båda optimala, och lösningen är alltså ej unik.

3. (a) Genom LDL^T-faktorisering ser vi att:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Eftersom ett av diagonalelementen i D är negativt så är matrisen H ej positivt definit.

(b) Bestäm nollrummet till A Det spänns av kolumnvektorn

$$Z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Den reducerade hessianen $Z^THZ = 1$ är positivt definit, så optimeringsproblemet (P) är konvext och har en unik lösning.
En lösning $\bar{x}$ till $Ax = b$ ges av $\bar{x} = (1, 0, 1)^T$.
Från $(Z^THZ)v = -Z^T(H\bar{x} + c)$ får vi att $\hat{v} = 8$ och det ger

$$\hat{x} = \bar{x} + Z\hat{v} = (9, -8, 1)^T.$$

(c) Lagrangemetoden ger ekvationssystemet:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & -1 \\ 4 & 8 & 12 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med $\hat{x}$ från (b) ovan så får vi $u = (-16, 5)^T$.
Annars får man lätt en triangulär matris genom 4 radoperationer och kan sedan lösa systemet.

4. (a) Gradienten till f är $\nabla f(x) = [x_2^2 - e^{-x_1}, \quad 2x_1x_2]$, och för att första ordningens villkor ska vara uppfyllda måste denna vara noll.
Om $x_1 = 0$ så måste $x_2^2 = 1$, dvs vi får punkterna $(0, 1)$ och $(0, -1)$. Om $x_2 = 0$ så måste $e^{-x_1} = 0$, vilket inte har en lösning.
Hessianen ges av

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{-x_1} & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix},$$

och i de stationära punkterna

$$\nabla^2 f(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

vilka båda är indefinita, vilket inses genom att göra LDL^T-faktoriseringar.
Eftersom punkterna inte uppfyller andra ordningens nödvändiga villkor, så är de ej lokala minpunkter.
Eftersom Hessianen är indefinit i minst en tillåten punkt så är problemet ej heller konvext.

(b) I punkten $x^{(0)} = (1,0)$ har vi då $d^{(0)}$ som lösning till $\nabla^2 f(1,0)d = -\nabla f(1,0)$,

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} d = -\begin{bmatrix} -e^{-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

dvs $d^{(0)} = (1,0)$.

Nästa punkt väljs med hjälp av backtracking. $f(1,0) = e^{-1}$ och $f(x^{(0)}+d^{(0)}) = f(2,0) = e^{-2} < e^{-1}$ så eftersom målfunktionsvärdet minskar så tar vi ett steg av full längd.

(c) Problemet kan skrivas $\min f(x)$ då $h(x) = 0$.

Om $x_1 = 0$ och $h(x) = 0$ så måste $x_2 = 1/2$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + u\nabla h(x^*) &= \begin{pmatrix} x_2^2 - e^{-x_1} & 2x_1x_2 \end{pmatrix} + u \big) -e^{-x_1} \quad 1-2x_2 \big) \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \end{pmatrix} + u\big) -1 \quad 0 \big) = 0. \end{aligned}$$

Detta är sant för $u = 4$, och punkten uppfyller Lagrange-villkoren.

5. (a) Målfunktionen är konvex på hela $\mathbb{R}^3$, ty en kvadratisk funktion med positivt semidefinit Hessian.

Tillåtna området är konvext eftersom på formen $g(x) \le 0$ med $g(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 1,\ x_1^2 - 1 - x_2)^T$ där funktionen $g(x)$ har konvexa funktioner som element.

Problemet är konvext.

(b) Problemet är konvext, så det finns högst en punkt så att KKT-villkoren är uppfyllda.

Antag att bivillkor 1 är inaktivt och bivillkor 2 är aktivt, då är enligt KKT 4, $\hat{y}_1 = 0$.

Det ger att KKT 1 ges av

$$\nabla f + \hat{y}_2 \nabla g_2 = (4x_1 - 3, 2, x_3) + \hat{y}_2(2x_1, -1, 0) = 0.$$

Denna ekvation kan bara vara uppfylld om $x_3 = 0$ och $\hat{y}_2 = 2$, vilket leder till att $x_1 = 3/8$.

Bivillkor 2 aktivt ger att $x_1^2 - 1 - x_2 = 0$, dvs $(3/8)^2 - 1 - x_2 = 0$ så $x_2 = -55/64$.

KKT 2 säger att bivillkor 1 måste vara uppfyllt, vilket ger att $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9/64 + (55/64)^2 + 0 \le 1/64(9+55) = 1$. Vi har då att punkten $(3/8, -55/64, 0)$ uppfyller KKT-villkoren, och eftersom problemet är konvext, och reguljärt eftersom det innehåller en inre punkt, så är punkten en global minpunkt.