Krister Svanberg, april 2012

1 Minkostnadsflödesproblem i nätverk

Ett nätverk består av en given mängd *noder* numrerade från 1 till m (där m är antalet noder) samt en given mängd *riktade bågar* mellan vissa par av noderna.
En båge som går från nod nr i till nod nr j betecknas (i, j) och ritas som en pil med spetsen vid nod j. Ibland kan det finns två bågar mellan två givna noder, dels en båge (i, j) från nod nr i till nod nr j, dels en båge (j, i) från nod nr j till nod nr i. Dessa måste man skilja på.

Låt $\mathcal{B}$ beteckna mängden av bågar (i, j) i nätverket, och låt n beteckna *antalet* bågar i $\mathcal{B}$.
Det förutsätts genomgående att nätverket är *sammanhängande*, vilket betyder att det *inte* är fråga om ett antal separata nätverk som fullständigt saknar förbindelse med varann.

Låt x_{ij} beteckna *flödet* (av någon storhet) i bågen $(i, j) \in \mathcal{B}$.
Till varje båge $(i, j) \in \mathcal{B}$ hör en given *kostnad per flödesenhet*, betecknad c_{ij}.
Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vara vektorer med komponenterna x_{ij} resp c_{ij},
för $(i, j) \in \mathcal{B}$, i någon väldefinierad ordning.

Vissa noder är *källnoder*, i vilka nätverket *fylls på* med givna kvantiteter flöde ("utifrån").
Vissa noder är *sänknoder*, i vilka nätverket *tappas av* på givna kvantiteter flöde.
De återstående noderna kallas *mellannoder*.
I varje nod råder flödesbalans, dvs *utflödet = inflödet*,
där utflödet från noden är summan av flödet i alla bågar ut från noden
plus eventuell avtappning i noden (om det är en sänknod),
medan inflödet till noden är summan av flödet i alla bågar in till noden
plus eventuell påfyllning i noden (om det är en källnod).

Låt b_i beteckna hur mycket flöde som tillförs nätverket i nod nr i. För källnoder är $b_i > 0$, för sänknoder är $b_i < 0$ och för mellannoder är $b_i = 0$. Vi förutsätter att $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$.

För att konkretisera den kommande framställningen ska vi utgå från ett nätverk bestående av fem stycken noder, dvs $m = 5$, numrerade från 1 till 5, samt följande bågmängd:

$$\mathcal{B} = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5)\}, \quad \text{dvs } n = 7.$$

Läsaren rekommenderas att utan dröjsmål rita upp detta nätverk; den fortsatta läsningen kommer att underlättas väsentligt av en sådan figur.

Vi antar att noderna nr 1 och 2 är källnoder med påfyllningen 40 resp 35 flödesenheter, medan noderna 3, 4 och 5 är sänknoder med avtappningen 30, 25 resp 20 flödesenheter.

Vi antar vidare att kostnaderna per flödesenhet i de olika bågarna ges av

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}} = (c_{12},\ c_{13},\ c_{23},\ c_{24},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{45}) = (2,\ 5,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2). \tag{1.1}$$

Minkostnadflödesproblemet svarande mot detta nätverk kan skrivas på följande form:

$$\text{MKF}: \quad \begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

där $\mathbf{x} = (x_{12},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{34},\ x_{35},\ x_{45})^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{c} = (c_{12},\ c_{13},\ c_{23},\ c_{24},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{45})^{\mathsf{T}}$,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ -30 \\ -25 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Denna matris $\tilde{\mathbf{A}}$ har *linjärt beroende* rader,
ty med $\mathbf{y}^{\mathsf{T}} = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^{\mathsf{T}}$ är $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{A}} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

Därmed är exempelvis den sista raden i $\tilde{\mathbf{A}} = -$ summan av de övriga raderna i $\tilde{\mathbf{A}}$.
Likaså är den sista komponenten i vektorn $\tilde{\mathbf{b}} = -$ summan av de övriga komponenterna i $\tilde{\mathbf{b}}$.
Det betyder att vi kan stryka (exempelvis) den sista av ekvationerna i systemet $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ utan att påverka lösningsmängden till systemet, eftersom den sista ekvationen automatiskt blir uppfylld om de övriga ekvationerna är uppfyllda.

Fortsättningsvis ska vi därför i stället skriva minkostnadsflödesproblemet på formen

$$\text{MKF}: \quad \begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

där $(m-1)\times n$–matrisen $\mathbf{A}$ har erhållits genom att stryka sista raden i $\tilde{\mathbf{A}}$, medan vektorn $\mathbf{b} \in I\!\!R^{m-1}$ har erhållits genom att stryka sista komponenten i $\tilde{\mathbf{b}}$.
Vi har alltså att

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ -30 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Denna matris $\mathbf{A}$ har linjärt oberoende rader, ty den enda lösningen till $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$, som på komponentform kan skrivas $y_1 - y_2 = 0$, $y_1 - y_3 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$, $y_2 - y_4 = 0$, $y_3 - y_4 = 0$, $y_3 = 0$ och $y_4 = 0$, är uppenbarligen $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Vi ska nu visa hur simplexmetoden förenklas när den tillämpas på MKF-problemet (1.3).

Eftersom $\mathbf{A}$ har linjärt oberoende rader så har varje baslösning $m-1$ st basvariabler och $n-m+1$ st icke-basvariabler. Motsvarande basmatris $\mathbf{A}_\beta$ är $(m-1)\times(m-1)$, dvs 4×4.

Det finns en trevlig tolkning av baslösningar till MKF–problemet, baserat på begreppet *uppspännande träd*. En given delmängd av bågarna utgör ett uppspännande träd om dels varje nod i nätverket vidrörs av minst en båge ur delmängden, dels det delnätverk som bildas av bågarna ur delmängden är sammanhängande, dels det inte finns någon "slinga" bestående av bågar ur delmängden, utan hänsyn tagen till bågarnas riktning

Sats: $m-1$ st kolonner ur $(m-1)\times n$–matrisen $\mathbf{A}$ i ett MKF-problem är linjärt oberoende *om och endast om* motsvarande $m-1$ st bågar bildar ett uppspännande träd.

Givet ett uppspännande träd, och därmed en motsvarande basmatris $\mathbf{A}_\beta$, så är det lätt att direkt i nätverket bestämma vilka värden de aktuella basvariablerna måste ha, dvs att lösa ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$. Detta ska nu illustreras i vårt exempel.

Välj exempelvis trädet bestående av bågarna $\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (4,5)\}$. (Rita figur!) Motsvarande basmatris $\mathbf{A}_\beta$ respektive icke-basmatris $\mathbf{A}_\nu$ är då

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

De tre icke-basvariablerna x_{13}, x_{34} och x_{35} är samtliga $= 0$ i den aktuella baslösningen.
Basvariablernas värden kan bestämmas i exempelvis följande ordning (se din figur):
$x_{12} = 40$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 1.
$x_{23} = 30$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 3.
$x_{24} = 45$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 2.
$x_{45} = 20$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 4.

Här blev resultatet en *tillåten* baslösning, ty samtliga basvariablerna blev ≥ 0, men detta gäller inte för alla val av uppspännande träd. Vi ska senare antyda hur man på ett systematiskt sätt kan bestämma en tillåten baslösning att starta simplexmetoden från.

Antag nu att vi, i likhet med ovan, har lyckats hitta en tillåten baslösning.
Nästa steg är då att avgöra om denna lösning är optimal, genom att beräkna de reducerade kostnaderna r_{ij} för icke-basvariablerna.
Först ska då vektorn $\mathbf{y} \in I\!R^{m-1}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}$, som i vårt fall, med $\mathbf{y}^\mathsf{T} = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ och $\mathbf{A}_\beta$ enligt (1.4), blir följande fyra ekvationer:

$y_1 - y_2 = c_{12}\,, \quad y_2 - y_3 = c_{23}\,, \quad y_2 - y_4 = c_{24}$ och $y_4 = c_{45}$.

Om vi inför $y_5 = 0$ så kan dessa ekvationer kortfattat skrivas

$$y_i - y_j = c_{ij} \text{ för alla } (i,j) \in \mathcal{B}_\beta \text{ (dvs för alla basbågar).} \tag{1.5}$$

Varje skalär y_i svarar alltså mot en nod i nätverket. Värdet på dessa skalärer kan bestämmas direkt i nätverket i exempelvis följande ordning (se din figur):
Först sätts $y_5 = 0$, vilket gäller per definition.
Basbågen $(4,5)$ ger sedan att $y_4 - y_5 = c_{45}$, dvs $y_4 = c_{45}$.
Basbågen $(2,4)$ ger sedan att $y_2 - y_4 = c_{24}$, dvs $y_2 = y_4 + c_{24}$.
Basbågen $(2,3)$ ger sedan att $y_2 - y_3 = c_{23}$, dvs $y_3 = y_2 - c_{23}$.
Basbågen $(1,2)$ ger slutligen att $y_1 - y_2 = c_{12}$, dvs $y_1 = y_2 + c_{12}$.

Enligt ovan är $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (c_{12},\ c_{13},\ c_{23},\ c_{24},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{45}) = (2,\ 5,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2)$.
Då blir (i tur och ordning) $y_5 = 0$, $y_4 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 2$ och $y_1 = 6$.

Nästa steg är att beräkna reducerade kostnaderna ur formeln $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\nu$, som i vårt fall, med $\mathbf{y}^\mathsf{T} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$ och $\mathbf{A}_\nu$ enligt (1.4), blir:
$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 5 - 6 + 2 = 1$,
$r_{34} = c_{34} - y_3 + y_4 = 1 - 2 + 2 = 1$,
$r_{35} = c_{35} - y_3 = 1 - 2 = -1$.

Om vi som tidigare inför $y_5 = 0$ så kan nyssnämnda uttryck kortfattat skrivas:

$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \quad \text{för alla } (i,j) \in \mathcal{B}_\nu \quad \text{(dvs för alla icke-basbågar).} \tag{1.6}$$

Om $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella tillåtna baslösningen optimal.
Om minst en icke-basvariabel har $r_{ij} < 0$ så ska vi byta bas genom att låta *en* av dessa icke-basvariabler bli en ny basvariabel. I exemplet ovan var $r_{35} = -1$ (och övriga $r_{ij} \geq 0$), vilket medför att vi sätter $x_{35} = t$ och låter t öka från 0, medan övriga icke-basvariabler ligger kvar vid 0. Därvid ändras basvariablernas värden entydigt som funktion av t. Hur de ändras kan bestämmas i exempelvis följande ordning (se din figur):

$x_{12}(t) = 40$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 1. (Påverkas ej av t.)
$x_{23}(t) = 30 + t$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 3.
$x_{24}(t) = 45 - t$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 2.
$x_{45}(t) = 20 - t$, pga flödesbalansvillkoret i nod nr 4.

Vi ser att den "nya" bågen $(3,5)$ tillsammans med några av "trädbågarna" (dvs några av bågarna svarande mot basvariabler) bildar en entydig slinga i nätverket. Varje basvariabel i denna slinga ändras med $+t$ eller $-t$. Basvariabler som inte ligger i slingan påverkas ej av t. Den basvariabel, bland de som ändras med $-t$, som först blir $= 0$ då t växer ska ut ur basen.

I vårt exempel kan t ökas till $t = 20$. Då blir $x_{45} = 0$. Den nya tillåtna baslösningen ges av $x_{12} = 40,\ x_{23} = 50,\ x_{24} = 25,\ x_{35} = 20$ (basvariablerna) och $x_{13} = 0,\ x_{34} = 0,\ x_{45} = 0$.
Motsvarande uppspännande träd ges av $\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),\,(2,3),\,(2,4),\,(3,5)\}$. (Rita figur.)

Nu är en simplexiteration fullbordad och vi upprepar ovanstående steg.

Skalärerna y_i beräknas i exempelvis följande ordning:
Först sätts $y_5 = 0$, vilket gäller per definition.
Basbågen $(3,5)$ ger sedan att $y_3 - y_5 = c_{35}$, dvs $y_3 = c_{35} = 1$.
Basbågen $(2,3)$ ger sedan att $y_2 - y_3 = c_{23}$, dvs $y_2 = y_3 + c_{23} = 3$.
Basbågen $(2,4)$ ger sedan att $y_2 - y_4 = c_{24}$, dvs $y_4 = y_2 - c_{24} = 1$.
Basbågen $(1,2)$ ger slutligen att $y_1 - y_2 = c_{12}$, dvs $y_1 = y_2 + c_{12} = 5$.

Nästa steg är att beräkna reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ur formeln
$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$, vilket ger

$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 5 - 5 + 1 = 1$,
$r_{34} = c_{34} - y_3 + y_4 = 1 - 1 + 1 = 1$,
$r_{45} = c_{45} - y_4 + y_5 = 2 - 1 = 1$.

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är den aktuella tillåtna baslösningen ovan optimal.

Man kan notera att när simplexmetoden tillämpas på MKF enligt ovan så består kalkylerna enbart av additioner och subtraktioner. Därav följer att om alla b_i och c_{ij} är heltal så behöver man bara addera och subtrahera heltal, varvid exempelvis avrundningsfel aldrig uppkommer. Vidare följer att om alla b_i är heltal så blir alla x_{ij} hela tiden heltal. Speciellt kommer då den optimala lösning som metoden hittar att vara heltalig, trots att man inte explicit kräver det! Denna egenskap medför att man exempelvis kan lösa så kallade *assignmentproblem* (där variablerna är binära) som minkostnadsflödesproblem, utan att explicit kräva att varje variabel endast får anta något av värdena 0 och 1.

Avslutningsvis ska antydas hur man kan bestämma en tillåten baslösning till MKF-problemet, utan att behöva pröva sig fram med gissade uppspännande träd.

Utöka nätverket genom att först införa en *extranod* som vi kallar nummer $m+1$,
dvs nummer 6 i vårt fall. Inför sedan m st *extrabågar* enligt följande:
För varje källnod införs en båge *från* källnoden *till* extranoden.
För varje sänknod införs en båge *till* sänknoden *från* extranoden.
För varje mellannod införs antingen en båge från mellannoden till extranoden
eller en båge till mellannoden från extranoden.

I vårt exempel innebär detta att vi inför extrabågarna $\{(1,6), (2,6), (6,3), (6,4), (6,5)\}$, utöver de ursprungliga bågarna.

Betrakta sedan ett MKF-problem i detta utökade nätverk, där kostnadskoefficienterna c_{ij} för extrabågarna väljs till ett "stort" tal M, så att flödet i dessa bågar blir väldigt dyrt, medan de ursprungliga bågarna i nätverket behåller sina från början givna c_{ij}.

En tillåten baslösning till detta utökade MKF-problem erhålls genom att till basvariabler välja de variabler som svarar mot extrabågarna (som utgör ett uppspännande träd till det utökade nätverket). Basvariablernas värden ges av $x_{i,m+1} = b_i \geq 0$ i bågar *till* extranoden, och $x_{m+1,i} = -b_i \geq 0$ i bågar *från* extranoden. I vårt exempel ges dessa basvariabelvärden av $x_{16} = 40$, $x_{26} = 35$, $x_{63} = 30$, $x_{64} = 25$ och $x_{65} = 20$.

Sedan appliceras simplexmetoden (som den har beskrivits ovan) på detta utökade MKF-problem. Eftersom extrabågarna är väldigt dyra i förhållande till de ursprungliga bågarna, så kommer simplexmetoden automatiskt att se till att flödet i alla extrabågar blir $= 0$ (om detta är möjligt), varvid flödet har förflyttats till det ursprungliga nätverkets bågar. Optimala lösningen till det utökade MKF-problemet kommer då att vara optimal lösning även till det ursprungliga nätverket.