



KTH Matematik

Tentamen i SF2974 Portföljteori och riskvärdering
Måndagen den 14 januari, 2008, klockan 8.00 – 13.00

Examinator: Ulf Brännlund, telefon 790 73 20.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare tillhandahållen från institutionen.

Lösningsmetoder: Motivera dina lösningar noggrant. Om du använder metoder som inte blivit utlärd i denna kurs måste du motivera mycket tydligt och noggrant.

Obs! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

Totalt kan 50 poäng erhållas. Därtill kan du få 4 poäng från hemtalen. Totalt 24 poäng ger säkert godkänt.

1. (“Teori”) Antag att det på en marknad finns n värdepapper där avkastningen på värdepapper i kan beskrivas av en enkel faktormodell utan felterm, $r_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j$ där a_i och b_{ij} är konstanter och f_j är stokastiska variabler (faktorer). Visa att det under antagande om arbitragefrihet finns konstanter λ_0 och λ_j , $j = 1, \dots, m$ sådana att

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij} \lambda_j.$$

Du får utan bevis använda följande lemma:

Givet en $m \times n$ matris A och en vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att om $Ax = 0 \Rightarrow b^T x = 0$ så gäller att $b = A^T y$ för något $y \in \mathbb{R}^m$ (10p)

2. En förvaltares betalningsförpliktelser framgår av nedanstående tabell jämte utbetalningarna från två stycken obligationer i vilka denne kan investera i syfte att kunna möta betalningsförpliktelserna.

Datum	Diskontoreringsfaktor	Betalning Obl. 1 (kr)	Betalning Obl. 2 (kr)	Betalningsförpliktelse (Mkr)
14 jan 2009	0.9534	7	6	10
14 jan 2010	0.9012	107	6	20
14 jan 2011	0.8478		6	50
14 jan 2012	0.7911		6	50
14 jan 2013	0.7483		106	50

- (a) Bestäm pris och (kvasi-modifierade) durationer för de två obligationerna. (5p)
(b) Formulera en linjärprogrammeringsmodell (men lös inte) för s.k. cash-matching för denne förvaltare. Motivera dina val av målfunktion och bivillkor. (5p)

3. En person har nyttofunktionen $u(w) = \log(1 + w)$, där w betecknar personens förmögenhet.

(a) Är denna person riskaversiv, riskneutral, eller risksökande? (2p)

(b) Vilket av följande två alternativ skulle personen föredra?

Alternativ A		Alternativ B	
Förmögenhet	Sannolikhet	Förmögenhet	Sannolikhet
0.5	1/5	0.75	1/4
1	1/2	1	1/2
2	3/10	1.5	1/4

För att få poäng måste du motivera ditt svar noggrannt. (5p)

(c) Vad är personens säkra ekvivalent för alternativ A? (3p)

4. Vadslagningsbyrån Oddset ställer ut odds på en match i badmintennis mellan världsettan Jagomir Khan och världstvåan Kumar Ludovice. En sådan match spelas i bäst av tre set, dvs först till två set vinner. Om ingen spelare lyckats vinna två set inom 30 minuter vinner den som vunnit flest set (1-0). Om ingen spelare har vunnit fler set än den andra blir det oavgjort (0-0 eller 1-1).

Oddset erbjuder de fem spelen "Khan vinner", "Ludovice vinner", "Oavgjort", "Någon vinner med exakt 1 sets övertag", "Någon vinner med 2-0". Oddsen på dessa spel är som följer

Spel	Odds
Khan vinner	200
Ludovice vinner	300
Oavgjort	600
Någon vinner med exakt 1 sets övertag	150
Någon vinner med 2-0	350

Oddsens skall tolkas på följande sätt: Om du satsar 100 kr på att Khan vinner, så får du 200 kronor om han vinner (dvs du vinner totalt 100 kr) och 0 kronor om han inte vinner (dvs du förlorar dina satsade 100 kronor).

På vadslagningsbyrån Oddset är det möjligt att också vara "bookmaker", vilket betyder att man tar motsatt position, dvs på föregående spel tar du emot 100 kronor nu, men måste betala tillbaka 200 kronor om Khan vinner, men får behålla de spelade 100 kronorna om Khan inte vinner.

Det är möjligt att satsa eller ta emot vilka belopp som helst.

Undersök om Oddsets odds ger arbitragemöjligheter. (10p)

5. På en liten aktiemarknad finns det fem stycken aktier. I tabellen nedan finns dessas förväntade avkastningar och standardavvikelser tabulerade.

Aktie	Förväntad avkastning	Standardavvikelse
i	(\bar{r}_i)	(σ_i)
1	8	10
2	10	12
3	6	10
4	10	12
5	8	12

Antag att korrelationen mellan alla fem värdepapper (parvis) är 0,09. Antag vidare att den riskfria räntan är 4.

- (a) Bestäm den portfölj bestående av de fem aktierna som har lägst varians under antagandet om att man får korta (och naturligtvis inte handla i den riskfria tillgången). (5p)
- (b) Bestäm, för fallet att man får handla i den riskfria tillgången, en effektiv portfölj som endast består av de fem aktierna. Antag att det är tillåtet att korta. (5p)

Även om du inte lyckas att numeriskt lösa ovanstående uppgifter, så kan du få poäng om du tydligt talar om vilka ekvationsystem som skall lösas.

Förmodligen kan du få nytta av följande specialfall av Sherman-Morrison's formel: Om A är positivt semidefinit och v en kolumnvektor så gäller att

$$(A + vv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}vv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}v}.$$