Formelblad som delas ut på tentan i 5B1752

Observera att det ej är tillåtet att använda räknare på tentan!

$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Simplexmetoden för LP-problem på standardform:

$\mathbf{A}_\beta = [\,\mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_m}]$, $\mathbf{A}_\delta = [\,\mathbf{a}_{\delta_1} \cdots \mathbf{a}_{\delta_\ell}]$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T} \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$, $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\delta$.

Färdiga om $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$. Annars, välj ett q med $r_{\delta_q} < 0$. $k = \delta_q$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$, $x_k = t$,

$z = \bar{z} + r_k t$, $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t$, $t^{\max} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$. Låt δ_q och β_p byta plats.

Duala problemet till allmänt LP-problem:

$$\begin{array}{rlcrl}
\text{minimera} & \mathbf{c}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{x}_2 & \qquad & \text{maximera} & \mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 \\
\text{då} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1, & & \text{då} & \mathbf{A}_{11}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1, \\
& \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, & & & \mathbf{A}_{12}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2, \\
& \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \ \ \mathbf{x}_2 \text{ fri.} & & & \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \ \ \mathbf{y}_2 \text{ fri.}
\end{array}$$

QP med likhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$, $(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{Z})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$, $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

MN-lösning till MK-problem: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{p}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}}$.

Newton: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$ om $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$ är pd. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}$.

Ickelinjär MK: minimera $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (h_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2$, där $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in I\!R^m$.

$\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $m \times n$–matris med $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ i rad nr i och kolonn nr j.

$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (radvektor), $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_i h_i(\mathbf{x})\nabla^2 h_i(\mathbf{x})$.

Gauss-Newton: $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k\mathbf{d}^{(k)}$.

QP med olikhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
Optimalitetsvillkor: $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$.
Steg 1: Givet $\bar{\mathbf{x}}$ och (α, γ) med $\mathbf{A}_\alpha\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_\alpha$ och $\mathbf{A}_\gamma\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}_\gamma$, finns $\bar{\mathbf{u}}$ så att $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$?
Om JA, gå till Steg 2. Om NEJ, gå till Steg 3.
Steg 2: Om $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, STOPP. Annars, välj ett q med $\bar{u}_q < 0$ och flytta över α_q till γ-vektorn.
Steg 3: Bestäm $\hat{\mathbf{d}}$ ur problemet: minimera $\frac{1}{2}\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d}$ då $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{d} = \mathbf{0}$.
Om $\mathbf{A}_\gamma(\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}}) \geq \mathbf{b}_\gamma$, ändra $\bar{\mathbf{x}}$ till $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}}$ och gå till Steg 1.
Annars, låt $\mathbf{s} = \mathbf{A}_\gamma\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_\gamma$, $\mathbf{g} = \mathbf{A}_\gamma\hat{\mathbf{d}}$, $\hat{t} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{s_i}{-g_i} \mid g_i < 0 \right\} = \dfrac{s_p}{-g_p}$.
Ändra $\bar{\mathbf{x}}$ till $\bar{\mathbf{x}} + \hat{t}\cdot\hat{\mathbf{d}}$ och flytta över γ_p till α-vektorn. Gå till Steg 1.

Ickelinjär optimering under olikhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, för $i = 1, \ldots, m$.

KKT-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{y}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\mathsf{T}$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\hat{y}_i \geq 0$, $\hat{y}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.