KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 24 augusti 2002 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. (a) Vi kan skriva om problemet som

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m z_i \\ \text{då} & x_i k + l + z_i \ge y_i, \quad i=1,\dots,m, \\ & -x_i k - l + z_i \ge -y_i, \quad i=1,\dots,m. \end{array}$$

Om vi inför dualvariabler u_i svarande mot bivillkor $x_i k + l + z_i \ge y_i$ och dualvariabler v_i svarande mot bivillkor $-x_i k - l + z_i \ge -y_i$ kan det duala problemet skrivas som

$$(DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^m y_i(u_i - v_i) \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m x_i(u_i - v_i) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m (u_i - v_i) = 0, \\ & u_i + v_i = 1, \quad i=1,\dots,m, \\ & u \ge 0, \\ & v \ge 0. \end{array}$$

(b) Använd förslagsvis simplexmetoden för att lösa (DLP) som svarar mot ursprungsproblemet. Basmatrisen får speciell struktur. Bivillkorsmatrisen har två fulla rader och sedan enhetsmatriser. Detta gör att vi kan organisera beräkningarna så att vi bara behöver lösa ekvationer där matrisen har dimension 2×2, oberoende av m. Om vi sedan lägger till någon eller några kolumner löser vi det modifierade problemet (DLP) med simplexmetoden genom att utgå från den tillåtna baslösning som vi fått då vi löst ursprungsproblemet. Den lösningen är ju tillåten till det modifierade problemet.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Vi får

$$\begin{array}{rll} \varphi(u) = & \min & (2u_1-4)x_1 + (2u_1-7)x_2 + (u_2-3)x_3 + (u_2-1)x_4 - 3u_1 - u_2 \\ & \text{då} & x_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,4. \end{array}$$

(b) Låt $\bar u = (2\ 2)^T$. Vi får

$$\begin{array}{rll} \varphi(\bar u) = & \min & -3x_2 - x_3 + x_4 - 8 \\ & \text{då} & x_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,4. \end{array}$$

Det finns två optimallösningar, $x^1(\bar u) = (0\ 1\ 1\ 0)^T$ respektive $x^2(\bar u) = (1\ 1\ 1\ 0)^T$. Motsvarande subgradienter blir

$$\begin{pmatrix} 2x_1^1(\bar u) + 2x_2^1(\bar u) - 3 \\ x_3^1(\bar u) + x_4^1(\bar u) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} 2x_1^2(\bar u) + 2x_2^2(\bar u) - 3 \\ x_3^2(\bar u) + x_4^2(\bar u) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Då en konvexkombination av dessa subgradienter ger subgradient $(0\ 0)^T$ följer att vi $\bar u$ är optimallösning till det duala problemet.)

(c) Bivillkoret $2x_1 + 2x_2 \le 3$ är ekvivalent med $x_1 + x_2 \le 1$ då $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2$. Med den omskrivningen får problemet heltalsegenskapen. Alla extrempunkter blir heltaliga om bivillkoren $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,\dots,4$, ersätts med $0 \le x_i \le 1$, $i = 1,\dots,4$. Därmed kan problemet lösas som ett linjärprogrammeringsproblem.

5. Vi ser att x^* är tillåten med bivillkor 3, 4 och 5 bindande. Om vi lägger till bivillkoret $x_2 \ge 0$ blir x^* otillåten. Däremot bibehålls tillåtenhet i motsvarande duala problem.

Betrakta det duala LP-problemet (DLP) definierat av

$$(DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y = c, \\ & y \ge 0. \end{array}$$

(Vi låter här bivillkoret $x_2 \ge 0$ vara inkluderat som sjätte raden i A respektive sjätte komponenten i b.)

Vi kan beteckan bindande bivillkorsmatrisen med A_B och bindande högerledsvektorn med b_B. Vi löser (DLP) med simplexmetoden och startar med den bindande bivillkorsmatris som ges av x^*. Där är $B = \{3,4,5\}$. Motsvarande y fås ur $A_B^T y = c$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

vilket ger $y = (0\ \ 0\ \ 0\ 1\ 3\ 0)^T$. Reducerade kostnaderna till (DLP) ges av

$$b^T - x^{*T} A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Komponent sex är positiv, dvs det givna y är inte optimal till det nya problemet. (Det visste vi ju redan. Dessutom ser vi att om vi stryker bivillkor sex så är lösningen optimal, vilket stämmer med vad som påstås.)

Sökriktningen p är noll för ickebasvariablerna utom för komponent sex, där $p_6 = 1$. Förändringen i y_B ges av p_B enligt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p_B = (1 \, -1 \, -1)^T$. Maximal steglängd längs med p ges av minsta kvoten $(y_B)_i/(-p_B)_i$ för negativa $(p_B)_i$. Den fås för $i = 2$ och har värde 1. Därmed får vi nytt $B = \{3, 6, 5\}$ och nytt

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Motsvarande multiplikatorer till (DLP) fås ur $A_B x = b_B$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs $x = (1 \; 0 \; 1)^T$. Reducerade kostnaderna till (DLP) ges av

$$b^T - x^T A^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alla reducerade kostnader är ickepositiva. Därmed har vi löst (DLP). Optimallösning till nya problemet är alltså $x = (1 \; 0 \; 1)^T$.