Kungl Tekniska Högskolan

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 14 december 2002 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Ja.

(b) Ja.

(c) Nej.

(d) Nej.

(e) Ja.

2. (a) Maximalt steg $\alpha_{\max}$ så att $x+\alpha_{\max}\Delta x \geq 0$ och $s+\alpha_{\max}\Delta s \geq 0$ ges av $\alpha_{\max} = 0.6$. Vi kan exemplevis välja 95% av maximala steget, vilket ger $\alpha = 0.57$. Därmed får vi

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x+\alpha\Delta x = (0.05 \;\; 0.81 \;\; 1.76)^T, \\ y &\leftarrow y+\alpha\Delta y = (0.76 \;\; 1.14)^T, \\ s &\leftarrow s+\alpha\Delta s = (1.95 \;\; 1.19 \;\; 0.24)^T. \end{aligned}$$

Då vi inte tar enhetssteget kommer de linjära likhetsbivillkoren inte att vara uppfyllda och därmed blir den nya punkten varken primalt eller dualt tillåten.

(b) Den nya punkten är alltså otillåten. Vi kan exempelvis ta ytterligare ett steg mot trajektorian och låta $\mu = (x^Ts)/n$ för den nya punkten dvs $\mu = 229/463 \approx 0.4946$, samt välja $\sigma = 1$. Det innebär att vi vill ta ett Newtonsteg mot att lösa

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^Ty+s &= c, \\ XSe &= \sigma\mu e, \end{aligned}$$

där $e = (1 \; 1 \; \dots 1)^T$. Med $X = \mathrm{diag}(x)$ och $S = \mathrm{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax-b \\ A^Ty+s-c \\ XSe-\sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1.19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.2900 \\ 0.4300 \\ -0.4300 \\ 0.8600 \\ 0.3971 \\ -0.4693 \\ 0.0722 \end{pmatrix},$$

där högerledets sista tre komponenter avrundats till fyra decimaler.

3. (Se kursmaterialet.)

4. Om vi utgår från extrempunkterna $x^1 = (\text{-}1 \; 0 \; 0 \; 0)^T$ och $x^2 = (0 \; 0 \; 0 \; \text{-}1)^T$ blir första basmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} A_Hx^1 & A_Hx^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_2 + \min_{x\in S}(c - A_H^Ty_1)^Tx$. Vi får

$$c^T - y_1A_H = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir x^1 eller x^2, vilka båda ger minsta reducerade kostnaden noll. Alltså är problemet löst. Optimallösningen x^* ges av

$$x^* = \alpha_1x^1 + \alpha_3x^3 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Om vi i (IP') inför en n-dimensionell lagrangemultiplikatorvektor u och lagrangerelaxerar bivillkoren $y - x = 0$ får vi det duala problemet

$$\begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \in I\!R^n, \end{array}$$

där

$$\varphi(u) = \begin{array}{ll} \min & c^T x - u^T(x-y) \\ \text{då} & Ay \geq b, \\ & x \in X, \\ & y \in Y. \end{array}$$

Det lagrangerelaxerade problemet sönderfaller i ett problem i x och ett problem i y enligt

$$\varphi(u) = \begin{array}{ll} \min & (c-u)^T x \\ \text{då} & x \in X, \end{array} + \begin{array}{ll} \min & u^T y \\ \text{då} & Ay \geq b, \; y \in Y. \end{array}$$

Problemet i x är ett heltalsprogrammeringsproblem av samma typ som man skulle få om bivillkoret $Ax \geq b$ lagrangerelaxerats. Problemet i y är ett linjärprogrammeringsproblem om $Y = \{x \in I\!R^n : Cx \geq d\}$.

(b) Om vi låter optimallösningarna till det relaxerade problemet vara $x(u)$ respektive $y(u)$ får vi en subgradient ur $y(u) - x(u)$.