KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Måndagen den 18 oktober 2004 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Nej.

(b) Ja.

(c) Ja.

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (a) Då endast ickebasvariablernas kostnad ändras får vi

$$s_\delta = s_0 + \delta\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\delta & 3-\delta & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Kravet $s_\delta \geq 0$ ger $\delta_{\max} = 1$.

(b) För $\delta = \delta_{\max}$ blir reducerade kostnaden för x_2 noll, varför x_2 kan tas in i basen utan att målfunktionsvärdet ändras.

Vi får

$$p_B = -B^{-1}A_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Maximal steglängd ges av kravet $x_B + \alpha p_B \geq 0$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\alpha_{\max} = 1$. Då har vi en ny optimal baslösning $\tilde{x} = (2\ 1\ 0\ 0)^T$. Vi kan skapa en tredje optimallösning som en konvexkombination av de två optimala baslösningarna, exempelvis

$$\tfrac{1}{2}x_0 + \tfrac{1}{2}\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Maximalt steg $\alpha_{\max}$ så att $x + \alpha_{\max}\Delta x \geq 0$ och $s + \alpha_{\max}\Delta s \geq 0$ ges av $\alpha_{\max} = 2$. Vi kan därmed välja $\alpha = 1$, vilket ger

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \alpha\Delta x = (3/2\ \ 1/2)^T, \\ y &\leftarrow y + \alpha\Delta y = 3/2, \\ s &\leftarrow s + \alpha\Delta s = (1/2\ 3/2)^T. \end{aligned}$$

Då vi tar enhetssteget kommer de linjära likhetsbivillkoren att vara uppfyllda och därmed blir den nya punkten både primalt och dualt tillåten.

(b) Vi kan låta $\mu = (x^T s)/n$ för den nya punkten dvs $\mu = 3/4$, samt välja $\sigma = 0.1$. Det innebär att vi vill ta ett Newtonsteg mot att lösa

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \sigma\mu e, \end{aligned}$$

där $A = (1\ \ 1)$, $b = 2$, $c = (2\ \ 3)^T$, $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och $e = (1\ \ 1)^T$. Det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{27}{40} \\ -\frac{27}{40} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Betrakta ett olikhetsbivillkor på formen $a^T x \leq b$. Om $x_j \in \{0,1\}$, $j = 1,\dots,n$, får vi $a_j x_j \leq \max\{a_j, 0\}$. Vi kan därför säga att bivillkoret är redundant om

$$\sum_{j=1}^{n} \max\{a_j, 0\} \leq b.$$

Detta villkor är uppfyllt för $x_1 + x_2 \leq 2$ och $x_3 + x_4 \leq 2$.

(b) Lagrangerelaxering ger

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \quad & \min && -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - u(-4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 + 11) \\ & \text{då} && -x_1 - x_2 \geq -2, \\ &&& -x_3 - x_4 \geq 2, \\ &&& x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

Bivillkoren $-x_1 - x_2 \geq -2$ och $-x_3 - x_4 \geq -2$ är fortfarande redundanta, varför vi kan skriva

$$\begin{aligned} \varphi(u) = -11u + \quad & \min && (4u-3)x_1 + (5u-4)x_2 + (6u-5)x_3 + (7u-6)x_4 \\ & \text{då} && x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

Här kan vi minimera över varje x_j för sig, vilket ger

$$\varphi(u) = -11u + \min\{4u-3, 0\} + \min\{5u-4, 0\} + \min\{6u-5, 0\} + \min\{7u-6, 0\}.$$

Vi ser att optimallösning blir $u^* = 5/6$ med $x^1(u^*) = (0\ 0\ 1\ 1)^T$ eller $x^2(u^*) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$. Insättning i det relaxerade bivillkoret ger subgradienter

$$\begin{aligned} s^1 &= -11 + 4x_1^1(u^*) + 5x_2^1(u^*) + 6x_3^1(u^*) + 7x_4^1(u^*) = 2, \quad \text{respektive} \\ s^2 &= -11 + 4x_1^2(u^*) + 5x_2^2(u^*) + 6x_3^2(u^*) + 7x_4^2(u^*) = -4. \end{aligned}$$