KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Tisdagen den 11 januari 2005 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Nej.
(e) Nej.

2. (a) Maximalt steg $\alpha_{\max}$ så att $x + \alpha_{\max}\Delta x \geq 0$ och $s + \alpha_{\max}\Delta s \geq 0$ är obegränsat. Därmed får vi

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \alpha\Delta x = (2 \;\; 2 \;\; 1)^T, \\ y &\leftarrow y + \alpha\Delta y = (0 \;\; -1)^T, \\ s &\leftarrow s + \alpha\Delta s = (1 \;\; 1 \;\; 2)^T. \end{aligned}$$

Den nya punkten ligger på trajektorian för $\mu = 2$, och är därmed primalt och dualt tillåten.

(b) Vi bör reducera μ. Exempelvis kan vi för $\sigma = 0.1$ ta ett Newtonsteg mot att lösa

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \sigma\mu e, \end{aligned}$$

där $e = (1\;1\;\ldots 1)^T$ och $\mu = (x^T s)/n = 2$. Med $X = \operatorname{diag}(x)$ och $S = \operatorname{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.8 \\ -1.8 \\ -1.8 \end{pmatrix}.$$

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Vi ser att $\tilde{x}$ är en tillåten lösning där de tre första komponenterna är positiva. De aktiva bivillkoren i $\tilde{x}$ blir därför

$$\begin{pmatrix} A \\ e_4^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{där} \quad e_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed blir $\tilde{x}$ en tillåten baslösning om och endast om det inte finns nollskild vektor p så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Här finns lösning $p = t \cdot (-2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0)^T$, där t är en godtycklig skalär. Alltså är $\tilde{x}$ inte en tillåten baslösning.

(b) Vi ser att riktningen på p är unik. Låt till exempel $t = 1$, vilket ger $p = (-2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0)^T$ Om vi nu tar positiva skalärer β_1 och β_2 följer att $\tilde{x}$ ligger mellan x^1 och x^2, där $x^1 = \tilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \tilde{x} + \beta_2 p$. Eftersom $\tilde{x}$ då ligger mellan x^1 och x^2 kan $\tilde{x}$ skrivas som en konvexkombination av x^1 och x^2.
Vi har $x^1 = \tilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \tilde{x} + \beta_2 p$, vilket ger

$$x^1 = \tilde{x} - \beta_1 p = \tilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}(x^2 - \tilde{x}) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\tilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}x^2.$$

Alltså får vi

$$\tilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2.$$

Speciellt får vi $\tilde{x} + \eta p \geq 0$ för $-1 \leq \eta \leq 1/2$. De begränsande fallen $\eta = -1$ respektive $\eta = 1/2$ ger tillåtna lösningar

$$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Då p är unik vektor i nollrummet av de aktiva bivillkoren och ett nytt linjärt oberoende bivillkor läggs till i båda fallen, följer att båda är baslösningar.
Vi har $x^1 = \tilde{x} - p$ och $x^2 = \tilde{x} + (1/2)p$, varför vi med $\beta_1 = 1$ och $\beta_2 = 1/2$ får

$$\tilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2 = \frac{1}{3}x^1 + \frac{2}{3}x^2,$$

med x^1 och x^2 givna ovan.

(c) Då $c^T p \neq 0$ följer att $\tilde{x}$ inte är en optimallösning till (LP).

5. (a) För $u \geq 0$ får vi

$$\begin{array}{rl} \varphi(u) = -3u + \min & (u-4)x_1 + (u-5)x_2 + (u-7)x_3 + (u-8)x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 8, \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

(b) Speciellt då $u = 1$,

$$\begin{array}{rl} \varphi(1) = -3 + \min & -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 8, \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Inspektion ger att $x(1)^1 = (0\ 0\ 2\ 0)^T$, $x(1)^2 = (2\ 0\ 1\ 0)^T$ eller $x(1)^3 = (4\ 0\ 0\ 0)^T$. Därmed blir $\varphi(1) = -15$.

(c) Subgradient till φ i $u = 1$ ges av det relaxerade bivillkoret med ombytt tecken evaluerade i optimalpunkten enligt

$$x_1(1)^j + x_2(6)^j + x_3(6)^j + x_4(6)^j - 3,$$

vilket ger -1, 0, respektive 1. Då en subgradient är noll är $u^* = 1$.