KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Onsdagen den 11 januari 2006 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Ja.

(b) Nej.

(c) Ja.

(d) Ja.

(e) Nej.

2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) Vi kan skriva om problemet som

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m z_i \\ \text{då} & x_i k + l + z_i \geq y_i, \quad i = 1,\dots,m, \\ & -x_i k - l + z_i \geq -y_i, \quad i = 1,\dots,m. \end{array}$$

Om vi inför dualvariabler u_i svarande mot bivillkor $x_i k + l + z_i \geq y_i$ och dualvariabler v_i svarande mot bivillkor $-x_i k - l + z_i \geq -y_i$ kan det duala problemet skrivas som

$$(DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^m y_i(u_i - v_i) \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m x_i(u_i - v_i) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m (u_i - v_i) = 0, \\ & u_i + v_i = 1, \quad i = 1,\dots,m, \\ & u \geq 0, \\ & v \geq 0. \end{array}$$

(b) Använd förslagsvis simplexmetoden för att lösa (DLP) som svarar mot ursprungsproblemet. Basmatrisen får speciell struktur. Bivillkorsmatrisen har två fulla rader och sedan enhetsmatriser. Detta gör att vi kan organisera beräkningarna så att vi bara behöver lösa ekvationer där matrisen har dimension 2×2, oberoende av m. Om vi sedan lägger till någon eller några kolumner löser vi det modifierade problemet (DLP) med simplexmetoden genom att utgå från den tillåtna baslösning som vi fått då vi löst ursprungsproblemet. Den lösningen är ju tillåten till det modifierade problemet.

4. (a) Med $e = (1\ 1\ \dots 1)^T$, $X = \operatorname{diag}(x)$ och $S = \operatorname{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9 \\ -0.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}.$$

(b) Maximal steglängd ges av $\alpha_{\max} = 5/6$, för vilken s_1 blir noll. Om vi exempelvis tar steget $0.99\alpha_{\max}$ får vi $x^{(1)} = (1.2475\ 0.7525\ 0.7525)^T$, $y^{(1)} = (0.4950\ 0.9900)^T$ och $s^{(1)} = (0.0100\ 0.5050\ 0.5050)^T$.

5. (a) Då första tre komponenterna av x^* är strikt positiva, måste tre första komponenterna av $c - A^T y^*$ vara noll. Detta ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Unik lösning är $y^* = (-1\ 1)^T$. Det återstår att verifiera att $A^T y^* \leq c$ gäller även för komponenter fyra och fem. Vi får $c - A^T y^* = (0\ 0\ 0\ 2\ 3)^T$. Därmed är x^* optimal till (PLP) och y^* optimal till (DLP).

(b) Då (P_y) skapats med lagrangerelaxering av bivillkoret $b - Ax = 0$ i (PLP) blir $b - Ax(y)$ en subgradient till (DLP)s målfunktion i y. I uppgiften antas att $c - A^T y \geq 0$. Därmed blir $x = 0$ en optimallösning till (P_y), varför (P_y) får optimalvärde noll. Alltså blir alla lösningar x där $x \geq 0$ med $x_i = 0$ för i där $(A^T y - c)_i > 0$ är optimala till (P_y), då de ger målfunktionsvärde noll i (P_y). Speciellt blir då x^* optimal till P_{y^*}. Därmed blir $b - Ax^* = (0\ 0)^T$ en subgradient till (DLP)s målfunktion i y^*.