KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 1 september 2001 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Låt (P) och (D) beteckna ett primal-dualt par av linjärprogrammeringsproblem. Antag att båda problemen är tillåtna. Kan dualitetsgapet (skillnaden mellan primalt och dualt optimalvärde) då vara positivt? ....(1p)

(b) Låt A vara en $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader. Kan då en tillåten baslösning till problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

ha fler än m nollskilda komponenter? .... (1p)

(c) Antag att ett linjärprogrammeringsproblem på standardform har en väldefinierad primal-dual barriärtrajektoria för $\mu > 0$. Kan $x(\mu)$ vara en extrempunkt för något $\mu > 0$? ....(1p)

(d) Betrakta problemen (P) och (P') definierade enligt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & x \text{ heltalig}, \end{array} \qquad\qquad (P') \quad \begin{array}{ll} \min & (c-e)^T x \\ \text{då} & Ax \leq b, \\ & x \geq -e, \end{array}$$

där e är en vektor med alla komponenter ett. Är (P') en relaxering av (P)?
....(1p)

(e) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ \text{då} & Ax \geq c, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att detta problem är tillåtet och att A är antisymmetrisk, dvs $A = -A^T$. Är då optimalvärdet garanterat noll? .... (1p)

2. Givet ett linjärprogrammeringsproblem på formen

$$\begin{array}{llll} \min & c^T x & & \\ \text{då} & A_H x = b_H, & & A_H \text{ är “komplicerande”, dimension } m \times n, \\ & A_E x = b_E, & & A_E \text{ är “lätt”}, \\ & x \geq 0. & & \end{array}$$

Antag att $\{x : A_E x = b_E, x \geq 0\}$ är begränsad med extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag vidare att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfe dekomposition.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \min & c^T V \alpha \\ \text{då} & A_H V \alpha = b_H, \\ & e^T \alpha = 1, \\ & \alpha \geq 0. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^k c^T v_i \alpha_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^k A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ & \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\ & \alpha \geq 0. \end{array}$$

Här betecknar e en k-dimnensionell vektor med alla komponenter ett, och $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$.

Härled subproblemet som ett LP-problem. .... (5p)

3. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

För en fix positiv barriärparameter μ, ställ upp det primal-duala ekvationssystemet som ger barriärtrajektorian för detta problem. Utnyttja att problemet är litet och beräkna explicita uttryck för lösningen $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ till ekvationssystemet.
.... (5p)

4. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat enligt

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 + 3x_4 \leq -1, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

(a) Genom att lagrangerelaxera olikhetsbivillkoren får man ett tillhörande dualt problem (D) på formen

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \quad u \in I\!R^2, \end{array}$$

Ange det minimeringsproblem som ger $\varphi(u)$. .... (2p)

(b) Bestäm en subgradient $g^{(0)}$ till φ i punkten $u^{(0)} = (1\ 2)^T$. .... (1p)

(c) Visa att $u^{(0)}$ är en optimallösning till (D). .... (1p)

(d) Använd resultatet från (4c) för att bestämma en optimallösning till (IP). (1p)

Anmärkning: Att vi hittar en optimallösning på detta sätt är speciellt för problemet, och ingen generell egenskap.

5. Låt $z(l)$ vara optimalvärdet till problemet

$$(P(l)) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq l, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

och l är en given vektor. Låt $z(l)$ beteckna optimalvärdet till $(P(l))$.

För $l = 0$ ges optimallösningen till $(P(0))$ av x_0 och motsvarande duallösning är y_0, s_0, med $x_0 = (2\ 1\ 0\ 0)^T$, $y_0 = (1\ -1)^T$ och $s_0 = (0\ 0\ 4\ 4)^T$. Låt nu $l(d) = d \cdot l_0$, där d är en skalär och $l_0 = (-1\ 0\ 1\ 2)^T$. För d tillräckligt nära 0 gäller att $z(l(d)) = k \cdot d + m$. Bestäm k och m. Bestäm också ett så stort intervall som möjligt för d så att $z(l(d)) = k \cdot d + m$ för dessa värden på k och m. .... (5p)

Lycka till!