KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Tisdagen den 9 april 2002 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Låt x^* vara en tillåten lösning till problemet

$$(LP)\qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att det finns y så att $A^T y = c$. Är då x^* garanterat optimal till (LP)? .... (1p)

(b) Låt x^* vara en tillåten lösning till problemet

$$(LP)\qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att det inte finns y och s så att $A^T y + s = c$, $s \geq 0$. Kan då x^* vara optimal till (LP)? .... (1p)

(c) Betrakta problemen (P) och (P') definierade enligt

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq -e, \end{array} \qquad\qquad (P')\quad \begin{array}{ll} \min & (c-e)^T x \\ \text{då} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig}, \end{array}$$

där e är en vektor med alla komponenter ett. Är (P') garanterat en relaxering av (P)? .... (1p)

(d) Antag att du löser ett minimeringsproblem av typ linjärt heltalsprogrammeringsproblem, (IP), med hjälp av trädsökning och LP-relaxering i noderna. Antag att du hittar en optimallösning till (IP) i en nod. (Du vet typiskt inte att den är optimal i det läget.) Kan då det LP-relaxerade problemet i någon återstående nod ha lägre optimalvärde än det funna optimalvärdet till (IP)? .... (1p)

(e) Låt g_i, $i = 1, \ldots, m$, vara konkava funktioner på $I\!R^n$. För en given punkt $x^* \in I\!R^n$, låt s_i vara en subgradient till g_i i x^* för $i = 1, \ldots, m$. För $\alpha_i \in I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, sådana att $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, och $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, låt $g^\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(x)$ och $s^\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$. Blir då s^α garanterat en subgradient till g^α i x^*? .... (1p)

2. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll}
\min & -3x_1 + x_3 \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 = 4, \\
& -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3.
\end{array}
$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2\ 2)^T$, $y = (0\ 1)^T$, $s = (2\ 2\ 2)^T$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation. Denna startpunkt är varken primalt eller dualt tillåten. Däremot gäller $x_j s_j = 4$ för $j = 1, 2, 3$. Vi väljer därför initialt steg mot trajektorian för $\mu = 4$. Steget blir då $\Delta x = (-3/2 \ \ 1 \ -1/2)^T$, $\Delta y = (-5/2 \ \ 1/2)^T$ och $\Delta s = (3/2 \ \ -1 \ \ 1/2)^T$.

(a) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. Är den nya punkten tillåten till det primala respektive duala problemet? .... (2p)

(b) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas för att räkna ut sökriktningen i den iterationspunkt du bestämt i (2a). Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. Bestäm lämpliga värden på eventuella parametrar. .... (3p)

Anmärkning: Du ska *inte* lösa något ekvationssystem.

3. Man vill anpassa en linje $y = kx + l$ till ett antal givna punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Speciellt ska k och l väljas så att maximala avvikelsen i y-led minimeras, dvs k och l väljs enligt $\min_{k,l}\{\max_i |kx_i + l - y_i|\}$. Genom att införa en extra variabel z kan problemet skrivas som ett LP-problem på formen

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll}
\min & z \\
\text{då} & -z \leq kx_i + l - y_i \leq z, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{array}
$$

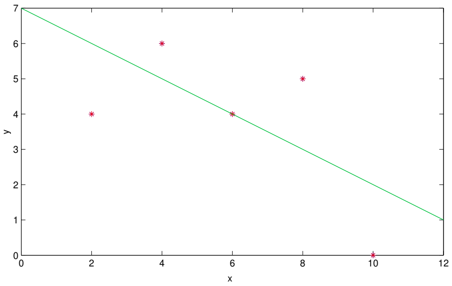
där x_i, $i = 1, \ldots, m$ och y_i, $i = 1, \ldots, m$ är givna parametrar samt k, l och z är variablerna. Vi antar att $m \geq 3$ samt $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$.

(a) Bilda det duala problemet (DLP) som svarar mot (LP). .... (2p)

(b) Antag speciellt att vi har följande konkreta fall där $m = 5$,

i	1	2	3	4	5
x_i	2	4	6	8	10
y_i	4	6	4	5	0

Optimalt parameterval för detta exempel är $k = -\frac{1}{2}$ och $l = 7$, vilket illustreras i figuren nedan.



I optimallösningen till detta exempel gäller att det finns tre punkter där avvikelsen är lika stor som den optimala, nämligen (x_1, y_1), (x_4, y_4) och (x_5, y_5). Finns det alltid en optimallösning för vilken det finns åtminstone tre punkter där avvikelsen är lika stor som den optimala (där vi antar att $m \geq 3$ samt $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$)? .... (1p)

(c) Antag att du har löst problemet för ett antal punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Antag nu att du vill lägga till ytterligare en eller några punkter (x_i, y_i) och lösa problemet igen. Hur skulle du gå tillväga för att lösa det modifierade problemet effektivt? .... (2p)

4. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$
(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \quad \text{heltal.} \end{array}
$$

Låt z_{IP} beteckna optimala målfunktionsvärdet till (IP).

Till (IP) kan vi definiera det duala problemet (D) enligt

$$
(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array}
$$

där $\varphi(u) = \min\{c^T x + u^T(b - Ax) : Cx \geq d, x \geq 0 \text{ heltal}\}$. Låt z_D beteckna optimala målfunktionsvärdet till (D).

Låt (LP) beteckna det linjärprogrammeringsproblem vi får ur (IP) om heltalskravet relaxeras, d.v.s.

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Låt z_{LP} beteckna optimala målfunktionsvärdet till (LP).

Visa att $z_{IP} \geq z_D \geq z_{LP}$. .... (5p)

5. Betrakta ett anläggningslokaliseringsproblem på formen

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} p_i z_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \leq 0, & i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, & j = 1, \ldots, n, \\ & z_i \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, m, \\ & x_{ij} \geq 0, & i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

där a_i, $i = 1, \ldots, m$, b_j, $j = 1, \ldots, n$, p_i, $i = 1, \ldots, m$, och c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, är heltaliga positiva konstanter.

(a) Ställ upp det lagrangerelaxerade problem som uppstår om bivillkoren

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

lagrangerelaxeras. Ange hur det lagrangelaxerade problemet kan lösas effektivt. .... (2p)

(b) Ställ upp det lagrangerelaxerade problem som uppstår om bivillkoren

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

lagrangerelaxeras. Ange hur det lagrangelaxerade problemet kan lösas effektivt. .... (2p)

(c) Diskutera vilken av de båda lagrangerelaxeringarna som bör ge den bästa underskattningen av ursprungsproblemets optimalvärde om motsvarande duala problem löses. .... (1p)

Lycka till!