KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 14 december 2002 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) och dess LP-relaxering (LP) definierade enligt

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig}, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att (LP) har minst en optimallösning och att (IP) har minst en tillåten lösning. Gäller det då garanterat att optval$(LP) \leq$ optval(IP), där optval anger optimalvärdet? .... (1p)

(b) Betrakta det primala och duala paret linjärprogrammeringsproblem

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att A är en 2×3-matris. Antag också att $x = (1 \ \ 2 \ \ 0)^T$ är tillåten till (LP) samt att $y = (-1 \ \ 1)^T$ och $s = (0 \ \ 0 \ \ 3)^T$ är tillåtna till (DLP). Är dessa lösningar då garanterat optimala till respektive problem? .... (1p)

(c) Betrakta det primala och duala paret linjärprogrammeringsproblem

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att A är en 2×3-matris. Antag också att $x = (1 \;\; 2 \;\; 0)^T$ är tillåten till (LP) samt att $y = (-1 \;\; 1)^T$ och $s = (1 \;\; 0 \;\; 3)^T$ är tillåtna till (DLP). Kan det då gälla att x är optimal till (LP) och y, s är optimal till (DLP)? ...... (1p)

(d) Betrakta problemet (LP) definierat enligt

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att det finns en vektor p sådan att $p \neq 0$, $Ap = 0$, $c^T p = 0$, $p \geq 0$. Kan då (LP) ha en unik optimallösning? .... (1p)

(e) Betrakta problemen (P) och (P') definierade enligt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq e, \end{array} \qquad (P') \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där e är en vektor med alla komponenter ett. Är då (P') garanterat en relaxering av (P)? .... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) definierat av

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_3 \\ \text{då} & x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ & -x_1 + x_3 = 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3. \end{array}$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (1\ 1\ 1)^T$, $y = (0\ 0)^T$, $s = (1\ 1\ 1)^T$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation. Denna startpunkt är varken primalt eller dualt tillåten. Däremot gäller $x_j s_j = 1$ för $j = 1, 2, 3$. Vi väljer därför initialt steg mot trajektorian för $\mu = 1$. Sökriktningen blir då $\Delta x = (-5/3 \;\; -1/3 \;\; 4/3)^T$, $\Delta y = (4/3 \;\; 2)^T$ och $\Delta s = (5/3 \;\; 1/3 \;\; -4/3)^T$.

(a) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. Är den nya punkten tillåten till det primala respektive duala problemet? .... (2p)

(b) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas för att räkna ut sökriktningen i den iterationspunkt du bestämt i (2a). Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet (exakta eller approximativa). Bestäm lämpliga värden på eventuella parametrar. ..... (3p)

Anmärkning: Du ska *inte* lösa något ekvationssystem.

3. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \ldots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \ldots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \ldots, N, \\ & x \geq 0, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N, \end{array}$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) .... (3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

4. Betrakta optimeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \\ \text{då} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ & |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \leq 1. \end{array}$$

Vi kan skriva (LP) som ett linjärprogrammeringsproblem genom att ersätta olikheten $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \leq 1$ med linjära olikheter, men det är inte nödvändigt att göra det explicit här. Istället är din uppgift att lösa (LP) med hjälp av Dantzig-Wolfe dekomposition. Betrakta bivillkoret $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2$ som huvudrestriktion. Den konvexa mängden $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \sum_{j=1}^{4} |x_j| \leq 1\}$ har extrempunkter av typen $(0 \text{ -}1 \ 0 \ 0)^T$, $(0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, etc. Starta med den tillåtna baslösning som erhålls genom att utgå från extrempunkterna $(\text{-}1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ och $(0 \ 0 \ 0 \text{ -}1)^T$. De subproblem som uppstår kan du lösa genom inspektion. .... (5p)

5. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \in X, \end{array}$$

där $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \geq d, x \text{ heltalig}\}$.

Antag att vi vill försöka få en underskattning av optimalvärdet till (IP) genom att först införa extravariabler y_j, $j = 1, \ldots, n$, och skriva om (IP) som det ekvivalenta problemet

$$
(IP') \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ay \geq b, \\ & x - y = 0, \\ & x \in X, \\ & y \in Y, \end{array}
$$

där $Y \supseteq X$. Därefter vill vi få en underskattning av optimalvärdet till (IP') genom att lösa det duala problem som erhålls då bivillkoren $x - y = 0$ lagrangerelaxeras.

(a) Genomför lagrangerelaxeringen av bivillkoren $x - y = 0$ i (IP') och ställ upp motsvarande duala problem. Ange, på så enkel form som möjligt, det (eller de) problem som behöver lösas då den duala målfunktionen ska evalueras. Låt då $Y = \{x \in I\!R^n : Cx \geq d\}$. .... (4p)

(b) Ange hur du kan bestämma en subgradient till din duala målfunktion då det relaxerade problemet från (5a) lösts. .... (1p)

Anmärkning: Ovanstående förfarande kallas ofta lagrangedekomposition. Man kan visa att underskattningen av optimalvärdet till (IP) som man får från det duala problem som uppstår då $x - y = 0$ lagrangerelaxeras i (IP') är minst lika stark som underskattningen man får från det duala problemet som uppstår då $Ax \geq b$ lagrangerelaxeras i (IP).

Lycka till!