KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Lördagen den 28 augusti 2004 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att (LP) har tillåtna punkter. Har (LP) då garanterat ett konvext tillåtet område? .... (1p)

(b) Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \quad x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Antag att (IP) har minst två (olika) tillåtna punkter. Kan då (IP) ha ett konvext tillåtet område? .... (1p)

(c) Betrakta det endimensionella linjärprogrammeringsproblemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & x \geq 0. \end{array}$$

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till det tillhörande barriärtransformerade problemet för en positiv barriärparameter μ. Gäller för detta problem att $x(\mu) = \mu$? .... (1p)

(d) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimallösningar till (LP). Är då $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ garanterat optimal till (LP)? .... (1p)

(e) Betrakta ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) och dess LP-relaxering (LP) definierade enligt

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig}, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att (IP) har minst en optimallösning. Kan då (LP) sakna tillåtna lösningar? .... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (PLP) och dess duala problem (DLP) givet av

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{respektive} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Till (PLP) och (DLP) kan vi definiera de barriärtransformerade problemen (P_μ) respektive (D_μ) givna av

$$(P_\mu) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x - \mu \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \ln x_j \\ \text{då} & Ax = b, \quad x > 0, \end{array}$$

respektive

$$(D_\mu) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y + \mu \sum_{j=1}^{3} \ln s_j \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s > 0, \end{array}$$

för en given positiv barriärparameter μ.

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till (P_μ) och låt $y(\mu)$, $s(\mu)$ beteckna optimallösningen till (D_μ). Avgör om $x(4) = (4 \ 2 \ 2)^T$ och $y(4) = (-1 \ 1)^T$ för det givna problemet. .... (5p)

3. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \ldots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \ldots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \ldots, N, \\ & x \geq 0, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N, \end{array}$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) .... (3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

4. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 \\ \text{då} & x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_3 + x_4 \leq 1, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Antag att vi lagrangerelaxerar det första bivillkoret med multiplikator u, vilket ger

$$(P_\mu) \quad \begin{array}{lll} \varphi(u) = & \min & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 - u \cdot (x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 1) \\ & \text{då} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & & x_3 + x_4 \leq 1, \\ & & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 4, \end{array}$$

och det tillhörande duala problemet

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(a) Låt $\tilde{u} = 10/7$. Visa att $x^1 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$ och $x^2 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$ är två optimallösningar till $(P_{\tilde{\mu}})$. Bestäm också med hjälp av dessa optimallösningar två (olika) subgradienter till φ i $\tilde{u}$. .... (3p)

(b) Bestäm hur stort dualitetsgapet blir för de givna problemen (IP) och (D). .... (2p)

Anmärkning: Du kan genomgående utnyttja att (IP) liksom de övriga heltalsprogrammeringsproblem som uppstår i denna uppgift har få tillåtna punkter. De får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. Exempelvis kan man använda inspektion. Då ser man till exempel att (IP) endast har en tillåten punkt, $x^* = (1\ 0\ 0\ 0)^T$.

5. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$
(LP) \qquad
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 \\
\text{då} & x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\
& x_1 + x_2 \le 1, \\
& x_3 + x_4 \le 1, \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 4.
\end{array}
$$

Lös (LP) med hjälp av Dantzig-Wolfe dekomposition. Betrakta bivillkoret $x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$ som huvudrestriktion. Den konvexa mängden $S = \{x \in I\!R^4 \ : \ x_1 + x_2 \le 1, x_3 + x_4 \le 1, x_j \ge 0, j = 1, \dots, 4\}$ har extrempunkter av typen $(0\ 0\ 0\ 0)^T$, $(1\ 0\ 1\ 0)^T$, $(1\ 0\ 0\ 1)^T$, etc. Starta med den tillåtna baslösning som erhålls genom att utgå från extrempunkterna $(0\ 0\ 0\ 1)^T$ och $(1\ 0\ 1\ 0)^T$. De subproblem som uppstår kan du lösa genom inspektion. .... (5p)

Lycka till!