KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Måndagen den 18 oktober 2004 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta det primala och duala paret linjärprogrammeringsproblem

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att x^* är optimal till (PLP) och y^*, s^* är optimala till (DLP). Kan det då gälla att $c^T x^* > b^T y^*$? .... (1p)

(b) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig}, \end{array}$$

och det tillhörande duala problemet

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array}$$

där $\varphi(u) = \min\{c^T x + u^T(b - Ax) : Cx \geq d, x \geq 0 \text{ heltal}\}$. Antag att x^* är optimal till (IP) och u^* är optimal till (D). Kan det då gälla att $c^T x^* > \varphi(u^*)$? .... (1p)

(c) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där A har full radrang. Antag att (LP) har minst en optimallösning. Finns det då garanterat minst en optimal baslösning? .... (1p)

(d) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där A har full radrang. Antag att x^* är en optimallösning till (LP) sådan att $x^* > 0$. Gäller då garanterat att $c = A^T y^*$ för någon vektor y^*? .... (1p)

(e) Betrakta ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) och ett relaterat linjärprogrammeringsproblem (LP) definierade enligt

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \; x \text{ heltalig}, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Är (LP) garanterat en relaxering av (IP)? .... (1p)

2. För en given skalär δ, låt $z(\delta)$ vara optimalvärdet till problemet

$$P(\delta) \quad \begin{array}{ll} \min & (c + \delta \cdot \widetilde{c})^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

För $\delta = 0$ ges den unika optimallösningen till $P(0)$ av x_0 och motsvarande duallösning är y_0, s_0, med $x_0 = (1\ 0\ 0\ 2)^T$, $y_0 = (1\ -1)^T$ och $s_0 = (0\ 1\ 3\ 0)^T$.

(a) Bestäm $\delta_{\max}$ så att x_0 är optimal till $P(\delta)$ för $\delta \leq \delta_{\max}$, men inte optimal till $P(\delta)$ för $\delta > \delta_{\max}$. .... (2p)

(b) Bestäm, utöver x_0, ytterligare två optimala lösningar till $P(\delta_{\max})$, varav en är en baslösning. .... (3p)

3. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \dots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \dots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ & x \geq 0, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{array}$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) .... (3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

4. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) definierat av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (1\ 1)^T$, $y = 0$, $s = (1\ 1)^T$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation. Denna startpunkt är primalt tillåten men inte dualt tillåten. Däremot gäller $x_j s_j = 1$ för $j = 1, 2$. Vi väljer därför initialt steg mot trajektorian för $\mu = 1$. Sökriktningen blir då $\Delta x = (1/2\ -1/2)^T$, $\Delta y = 3/2$ och $\Delta s = (-1/2\ \ 1/2)^T$.

(a) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. Är den nya punkten tillåten till det primala respektive duala problemet? .... (2p)

(b) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas för att räkna ut sökriktningen i den iterationspunkt du bestämt i (4a). Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet (exakta eller approximativa). Bestäm lämpliga värden på eventuella parametrar. ..... (3p)

Anmärkning: Du ska *inte* lösa något ekvationssystem.

5. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP)\qquad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \\ \text{då} & -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 \geq -11, \\ & -x_1 - x_2 \geq -2, \\ & -x_3 - x_4 \geq -2, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,4. \end{array}$$

(a) Bivillkoren $-x_1 - x_2 \geq -2$ och $-x_3 - x_4 \geq -2$ är redundanta (dvs de påverkar inte det tillåtna området). Föreslå en procedur som försöker identifiera redundanta olikhetsbivillkor för ett binärt linjärt heltalsprogrammeringsproblem. Din procedur ska lyckas identifiera de två bivillkoren ovan. .... (2p)

(b) Ställ upp det duala problem som uppstår då bivillkoret $-4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 \geq -11$ lagrangerelaxeras. Lös det duala problemet på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. Bestäm slutligen två subgradienter till den duala målfunktionen i den duala optimalpunkten. .... (3p)

Lycka till!