KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Tisdagen den 11 januari 2005 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi har ett linjärprogrammeringsproblem och det tillhörande duala problemet. Kan problemens dualitetsgap vara positivt och ändligt? ...... (1p)

(b) Antag att vi har ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem och ett tillhörande lagrangedualt problem. Kan problemens dualitetsgap vara positivt och ändligt? ...... (1p)

(c) Betrakta det primala och duala paret linjärprogrammeringsproblem

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att A är en 2×3-matris. Antag också att $x = (1 \;\; 2 \;\; 0)^T$ är tillåten till (LP) samt att $y = (-1 \;\; 1)^T$ och $s = (1 \;\; 0 \;\; 3)^T$ är tillåtna till (DLP). Kan dessa lösningar vara optimala till respektive problem? ...... (1p)

(d) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) tillåtna lösningar till (LP). Är då $-\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{3}{2}\bar{x}$ garanterat tillåten till (LP)? ...... (1p)

(e) Antag att man löser LP-relaxeringen som svarar mot ett cutting-stock problem. Blir då LP-problemets optimallösning garanterat heltalig? ...... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) definierat av

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_3 \\ \text{då} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ & x_2 - x_3 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{array}
$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2\ 1)^T$, $y = (-1\ 1)^T$, $s = (1\ 1\ 2)^T$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation. Denna startpunkt är inte dualt tillåten. Däremot gäller $x_j s_j = 2$ för $j = 1, 2, 3$. Vi väljer därför initialt steg mot trajektorian för $\mu = 2$. Sökriktningen blir då $\Delta x = (0\ 0\ 0)^T$, $\Delta y = (1\ \ -2)^T$ och $\Delta s = (0\ 0\ 0)^T$.

(a) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. Är den nya punkten tillåten till det primala respektive duala problemet? .... (2p)

(b) Det är i detta fall naturligt att låta nästa iterationspunkt vara $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ och $s + \Delta s$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas för att räkna ut sökriktningen i denna punkt. Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet (exakta eller approximativa). Bestäm lämpliga värden på eventuella parametrar. .... (3p)

Anmärkning: Du ska *inte* lösa något ekvationssystem.

3. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \geq 0, \end{array}
$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \dots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \dots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ & x \geq 0, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{array}
$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) .... (3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

4. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{x} = (1\ 1\ 1\ 0)^T$.

(a) Visa att $\widetilde{x}$ *inte* är en tillåten baslösning till (LP). .... (1p)

(b) Det går att skriva $\widetilde{x}$ som en konvexkombination av två tillåtna baslösningar till (LP). Bestäm denna konvexkombination. .... (3p)

(c) Visa att $\widetilde{x}$ *inte* är en optimallösning till (LP). .... (1p)

5. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat enligt

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 8x_4 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -3, \\ & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -8, \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

(a) Lagrangerelaxera bivillkoret $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -3$ i (IP) med en ickenegativ lagrangemultiplikator u. Ange det optimeringsproblem som ger den duala målfunktionen $\varphi(u)$ för ett fixt $u \geq 0$. .... (2p)

(b) Bestäm $\varphi(1)$ på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (1p)

(c) Bestäm ur svaret i uppgift (5b) två subgradienter till φ i punkten $u = 1$. Avgör sedan med hjälp av subgradienterna hur u^* förhåller sig till 1, där u^* betecknar en optimallösning till det duala problemet. .... (2p)

Lycka till!