KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Lördagen den 27 augusti 2005 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \;\; x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Antag att (IP) löses med hjälp av trädsökning med LP-relaxering i noderna. Antag att det LP-relaxerade problemet i rotnoden har heltalig optimallösning. Är då denna lösning garanterat optimal till (IP)? ....(1p)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimala baslösningar till (LP). Om vi löser (LP) med simplexmetoden, kan den då ge $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ som optimallösning? . (1p)

(c) Låt (PLP) och (DLP) beteckna ett primal-dualt par av linjärprogrammeringsproblem enligt

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widetilde{y}$, $\widetilde{s}$ och $\widehat{y}$, $\widehat{s}$ är två optimala lösningar till (DLP) sådana att $\widetilde{s}_1 > 0$ och $\widehat{s}_1 = 0$. Antag vidare att $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (PLP) sådan att $\bar{x}_1 = 0$. Kan $\bar{x}$ vara optimallösning till (PLP)? ....(1p)

(d) Är det möjligt att $VSS = 0$ för ett stokastiskt programmeringsproblem? (1p)

(e) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Har (IP) garanterat ett konvext tillåtet område? ....(1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (DLP) givet av

$$(DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Till (DLP) kan vi definiera det barriärtransformerade problemet (DLP_μ) givet av

$$(DLP_\mu) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y + \mu \sum_{j=1}^{3} \ln s_j \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s > 0, \end{array}$$

för en given positiv barriärparameter μ.

Låt $y(\mu)$, $s(\mu)$ beteckna optimallösningen till (DLP_μ). En person, vars kompetens inom linjärprogrammering är okänd, påstår att $s(1) = (2 \ \frac{1}{2} \ 2)^T$ och $y(2) = (-2 \ 0)^T$. Avgör för vart och ett av de två fallen om det stämmer. ....(5p)

3. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{x} = (3 \ 0 \ 1 \ 1)^T$.

(a) Det går att skriva $\widetilde{x}$ som en konvexkombination av två tillåtna baslösningar till (LP). Bestäm denna konvexkombination. ....(3p)

(b) Visa att en av de två tillåtna baslösningarna från (3a) är en optimallösning till (LP). ....(2p)

4. Givet ett linjärprogrammeringsproblem på formen

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{då} & A_H x = b_H, & A_H \text{ är "komplicerande", dimension } m \times n, \\ & A_E x = b_E, & A_E \text{ är "lätt"}, \\ & x \geq 0. & \end{array}$$

Antag att $\{x : A_E x = b_E, x \geq 0\}$ är begränsad med extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag vidare att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfe dekomposition.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \min & c^T V \alpha \\ \text{då} & A_H V \alpha = b_H, \\ & e^T \alpha = 1, \\ & \alpha \geq 0. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^k c^T v_i \alpha_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^k A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ & \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\ & \alpha \geq 0. \end{array}$$

Här betecknar e en k-dimnensionell vektor med alla komponenter ett, och $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$.

Härled subproblemet som ett LP-problem. .... (5p)

5. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -7x_1 - 8x_2 - 9x_3 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 \geq -2, \\ & -x_2 - x_3 \geq -2, \\ & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq -9, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

(a) Bestäm med hjälp av lagrangerelaxering av de två första bivillkoren en underskattning av optimalvärdet till (IP). Du behöver alltså lösa ett lagrangerelaxerat problem där du själv kan välja lämpliga värden på multiplikatorerna. Det problemet får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (3p)

(b) Betrakta det relaterade linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP') definierat av

$$(IP') \qquad \begin{array}{ll} \min & -7x_1 - 8x_2 - 9x_3 - (x_1 + x_2 - 2) - 5(x_2 + x_3 - 2) \\ \text{då} & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq -9, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Optimalvärdet till (IP') är -16. Ger detta optimalvärde någon skärpning av den underskattning till optimalvärdet du beräknat i (5a)? .... (2p)

Lycka till!