KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Onsdagen den 11 januari 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \; x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Antag att (IP) löses med hjälp av trädsökning med LP-relaxering i noderna. Antag att det LP-relaxerade problemet i rotnoden har heltalig optimallösning. Är då denna lösning garanterat optimal till (IP)? ....(1p)

(b) Betrakta ett linjärprogrammeringsproblem (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Kan (LP) ha precis två olika optimala lösningar (dvs varken fler eller färre)? ....(1p)

(c) Betrakta ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \quad x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Kan (IP) ha precis två olika optimala lösningar (dvs varken fler eller färre)? ....(1p)

(d) Givet $A \in I\!R^{m \times n}$, $b \in I\!R^m$ och $c \in I\!R^n$, betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att det finns $y \in I\!R^m$ så att $A^T y \leq c$. Kan då (LP) sakna tillåtna lösningar? .... (1p)

(e) Låt x^* vara en tillåten lösning till problemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att det inte finns y och s så att $A^T y + s = c$, $s \geq 0$. Kan då x^* vara optimal till (LP)? .... (1p)

2. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \dots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \dots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ & x \geq 0, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{array}$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) .... (3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

3. Man vill anpassa en linje $y = kx + l$ till ett antal givna punkter (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$. Speciellt ska k och l väljas så att summan av avvikelserna i y-led minimeras, dvs k

och l väljs enligt $\min_{k,l} \sum_{i=1}^{m} |kx_i + l - y_i|\}$. Genom att införa m extra variabler z_i, $i = 1, \dots, m$, kan problemet skrivas som ett LP-problem på formen

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} z_i \\ \text{då} & -z_i \leq kx_i + l - y_i \leq z_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

där x_i, $i = 1, \dots, m$ och y_i, $i = 1, \dots, m$ är givna parametrar samt k, l och z_i, $i = 1, \dots, m$, är variablerna. Vi antar att $m \geq 3$ samt $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$.

(a) Bilda det duala problemet (DLP) som svarar mot (LP). .... (3p)

(b) Antag att du har löst problemet för ett antal punkter (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$. Antag nu att du vill lägga till ytterligare en eller några punkter (x_i, y_i) och lösa problemet igen. Hur skulle du gå tillväga för att lösa det modifierade problemet effektivt? .... (2p)

4. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) definierat av

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{då} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ & x_2 - x_3 = 0, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{array}$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (1\ 1\ 1)^T$, $y = (0\ 0)^T$, $s = (1\ 1\ 1)^T$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation. Denna startpunkt är primalt och dualt tillåten med $x_j s_j = 1$ för $j = 1, 2, 3$. Vi väljer initialt steg mot trajektorian för $\mu = 0.1$.

(a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas för att räkna ut sökriktningen i den givna initialpunkten för det givna värdet på μ. Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. Verifiera att $\Delta x = (0.3\ \ -0.3\ \ -0.3)^T$, $\Delta y = (0.6\ \ 1.2)^T$ och $\Delta s = (-1.2\ \ -0.6\ \ -0.6)^T$. .... (3p)

(b) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. .... (2p)

Anmärkning: Du ska *inte* lösa något ekvationssystem.

5. Betrakta det primal-duala paret linjärprogrammeringsproblemen (PLP) och (DLP) givna av

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y \leq c, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

(a) Låt $x^* = (1\ 1\ 1\ 0\ 0)^T$. Visa att x^* är optimal till (PLP), genom att med hjälp av komplementaritet utgående från x^* ta fram en optimallösning y^* till (DLP). .... (2p)

(b) För ett givet $y \in I\!R^2$ där $A^T y \le c$, låt $x(y)$ vara en optimallösning till

$$(P_y) \quad \begin{array}{ll} \min & (c - A^T y)^T x \\ \text{då} & x \ge 0. \end{array}$$

(Notera att $x(y)$ inte behöver vara unik.) Bestäm med hjälp av $x(y)$ ett uttryck för en subgradient till (DLP)s målfunktion i den givna punkten y. Låt sedan speciellt x^* och y^* vara givna av (5a). Visa x^* är optimal till (P_{y^*}), och bestäm härur en subgradient till (DLP)s målfunktion i y^*. .... (3p)

Lycka till!