KTH Matematik

Tentamen i 5B1815 Tillämpad linjär optimering
Onsdagen den 18 oktober 2006 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Låt $x_B = (x_1\ x_4\ x_5)^T$ och låt $x_N = (x_2\ x_3)^T$. Vi får då basvariablernas värde ur $Bx_B = b$, vilket ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger $x_1 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$. Simplexmultiplikatorerna ges av $B^T y = c_B$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

vilket ger $y = (2\ \ 1\ -1)^T$. Reducerade kostnaderna ges av $s_N = c_N - N^T y$. Vi får $s_2 = -1$ och $s_3 = 2$. Då $s_2 < 0$ ska x_2 in i basen, dvs $p_N = e_1$. Basvariablernas ändring ges av $Bp_B = -Np_N$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $p_1 = 0$, $p_4 = -1$, $p_5 = -1$. Maximal steglängd blir 0, då $x_5 = 0$ och $p_5 < 0$. Alltså blir x_5 ickebasvariabel, men x är oförändrad. Nya basvariabler är x_1, x_2 och x_4. Simplexmultiplikatorerna ges av $B^T y = c_B$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger $y = (3\ \ 1\ \ -2)^T$. Reducerade kostnaderna ges av $s_N = c_N - N^T y$. Vi får $s_3 = 1$ och $s_5 = 1$. Därmed är vi klara. Optimallösningen är $x = (1\,0\,0\,2\,0)^T$.

(b) AF har rätt i att $\widetilde{x}$ är en optimal baslösning. Däremot kan simplexmetoden inte ha gett x_1, x_4 och x_5 som basvariabler i en optimallösning, eftersom det då fanns en negativ reducerad kostnad.

2. (a) Med $X = \mathrm{diag}(x)$ och $S = \mathrm{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Om vi beräknar $\alpha_{\max}$ som det största steg α för vilket $x + \alpha\Delta x \geq 0$ och $s + \alpha\Delta s \geq 0$ får vi $\alpha_{\max} = 9/11$. Då $\alpha_{\max} < 1$ kan vi inte ta enhetssteget. Om vi låter $\alpha = 0.99\alpha_{\max}$ blir nya iterationspunkten $x + \alpha\Delta x = (1.82\ \ 2.72\ \ 3.98\ \ 2.54)^T$, $y + \alpha\Delta y = (-0.35\ \ \ 1.43)^T$, och $s + \alpha\Delta s = (3.27\ 1.92\ \ 0.03\ \ 2.19)^T$. Eftersom steglängden inte är ett, och vi inte var tillåtna initialt, blir de nya iterationspunkterna inte tillåtna till primalen respektive dualen.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Baslösningen ges av

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Vi får $x_1 = 4$, $x_2 = 26/3$ och $x_3 = 6$, vilket ger en tillåten baslösning tillsammans med alla övriga variabler noll.

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $y_1 = 7/60$, $y_2 = 9/60$ och $y_3 = 11/60$.

Då $y \geq 0$ ska ingen slackvariabel in i basen. Subproblemet blir

$$\begin{array}{lll} 1 - & \frac{1}{60}\max & 7a_1 + 9a_2 + 11a_3 \\ & \text{då} & 7a_1 + 9a_2 + 11a_3 \leq 60, \\ & & a_i \geq 0,\ \text{heltaliga}, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Då målfunktionen i kappsäcksproblemet är en multipel av bivillkoret, ser vi att subproblemets optimalvärde inte är mindre är noll. De tre givna skärmönstren ger optimalvärdet noll.

Därmed finns inga negativa reducerade kostnader, och den föreslagna lösningen ovan är optimal till det LP-relaxerade problemet.

(b) Vi ser att mönster $(7\ 0\ 1)^T$ ger målfunktionsvärde noll i subproblemet. Eftersom baslösningen inte är degenererad innebär det att det finns optimallösningar där skärmönster $(7\ 0\ 1)^T$ ingår.

(c) Avrundning uppåt ger $x_1 = 4$, $x_2 = 9$ och $x_3 = 6$, vilket ger 19 W-rullar. Då LP-relaxeringen ger en undre gräns på $56/3$ samt optimalvärdet är heltaligt, kan vi avrunda $56/3$ uppåt och få undre gräns 19. Alltså är lösningen optimal.

5. (a) Om $z = 1$ är det optimalt att låta $x_1 = 6$ och $x_2 = 0$. Målfunktionsvärdet blir då -3. Om $z = 0$ är det optimalt att välja $x_1 = 0$ och $x_2 = 6$. Målfunktionsvärdet blir då -6. En kombination av dessa resultat ger optimallösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ och $z = 0$.

(b) Om z är kontinuerlig, blir $z = x_1/K$, eftersom z har en positiv kostnad och $x_1 \leq Kz$ är det enda bivillkor där z förekommer. Vi kan därför skriva om LP-relaxeringen som

$$\begin{array}{ll} \min & -\left(3 - \frac{15}{K}\right) x_1 - x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Därmed blir $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $z = 6/K$ optimal om $3 - 15/K \geq 1$. Om $3 - 15/K \leq 1$ blir $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 0$ optimal.

(c) Heuristiken levererar $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 0$ om $3 - 15/K \geq 1$, dvs då $K \leq 7.5$. Påståendet stämmer alltså för $\bar{K} = 7.5$.