KTH Matematik

Tentamen i 5B1815 Tillämpad linjär optimering
Onsdagen den 10 januari 2007 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Man vill anpassa en linje $y = kx + l$ till ett antal givna punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Speciellt ska k och l väljas så att summan av avvikelserna i y-led minimeras, dvs k och l väljs enligt $\min_{k,l} \sum_{i=1}^m |kx_i + l - y_i|$. Genom att införa m extra variabler z_i, $i = 1, \ldots, m$, kan problemet skrivas som ett LP-problem på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m z_i \\ \text{då} & -z_i \le kx_i + l - y_i \le z_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

där x_i, $i = 1, \ldots, m$ och y_i, $i = 1, \ldots, m$ är givna parametrar samt k, l och z_i, $i = 1, \ldots, m$, är variablerna. Vi antar att $m \ge 3$ samt $x_i \ne x_j$ då $i \ne j$.

(a) Bilda det duala problemet (DLP) som svarar mot (LP). .... (7p)

(b) Antag att du har löst problemet för ett antal punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Antag nu att du vill lägga till ytterligare en eller några punkter (x_i, y_i) och lösa problemet igen. Hur skulle du gå tillväga för att lösa det modifierade problemet effektivt? .... (3p)

2. Givet ett linjärprogrammeringsproblem på formen

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{då} & A_H x = b_H, & A_H \text{ är "komplicerande", dimension } m \times n, \\ & A_E x = b_E, & A_E \text{ är "lätt"}, \\ & x \ge 0. & \end{array}$$

Antag att $\{x : A_E x = b_E, x \ge 0\}$ är begränsad med extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag vidare att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfe dekomposition.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \min & c^T V\alpha \\ \text{då} & A_H V\alpha = b_H, \\ & e^T\alpha = 1, \\ & \alpha \ge 0. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^k c^T v_i \alpha_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^k A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ & \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\ & \alpha \ge 0. \end{array}$$

Här betecknar e en k-dimnensionell vektor med alla komponenter ett, och $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$.

Härled subproblemet som ett LP-problem. .... (10p)

3. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \ge 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

(a) Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Då löses som bekant det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet approximativt i varje iteration för en given barriärparameter μ. För ett givet $\mu > 0$, låt $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ beteckna en lösning till detta primal-duala ickelinjära ekvationssystem, sådan att $x(\mu) > 0$ och $s(\mu) > 0$. Stämmer det att

$$x(0.1) \approx \begin{pmatrix} 1.0241 \\ 2.0031 \\ 0.0333 \\ 0.0512 \end{pmatrix}, \quad y(0.1) \approx \begin{pmatrix} 2.9996 \\ 1.9514 \end{pmatrix}, \quad s(0.1) \approx \begin{pmatrix} 0.0976 \\ 0.0499 \\ 2.9996 \\ 1.9514 \end{pmatrix}$$

för vårt problem? .... (6p)

(b) Vårt linjärprogrammeringsproblem råkar ha heltalig optimallösning. Använd resultatet i (3a) för att på lämpligt sätt bestämma en optimallösning till (LP). Motivera ditt val av lösning och verifiera optimalitet. .... (4p)

4. Betrakta det blandade linjära heltalsprogrammeringsproblemet (MIP) givet av

$$(MIP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - x_2 + 15z \\ \text{då} & x_1 \le Kz, \\ & x_1 + x_2 \le 6, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad z \in \{0,1\}, \end{array}$$

där K är ett "stort tal" som modellerar en fast kostnad på 15 enheter som uppstår då $x_1 > 0$. Vi antar genomgående att K är "tillräckligt stort", dvs $K \ge 6$.

Du kan genomgående i denna uppgift utnyttja att problemet är litet. Systematiska metoder behöver inte användas.

I en tidigare tentamensuppgift har det visats att optimallösningen är $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ och $z = 0$. Vi ska här visa detta med hjälp av lagrangerelaxering.

(a) Antag att bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 6$ lagrangerelaxeras i (MIP) för en ickenegativ lagrangemultiplikator u. Ställ upp det optimeringsproblem som ger den lagrangeduala målfunktionen $\varphi(u)$. .... (4p)

(b) Antag att K är fixerat sådant att $6 \leq K \leq 7.5$. Visa att $u^* = 1$ är optimallösning till det duala problemet och att $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ och $z = 0$ är optimallösning till (MIP). Gör detta genom att använda dessa lösningar för att visa att (MIP) och dess duala problem har dualitetsgap noll. Bestäm slutligen en subgradient till φ i u^*. .... (6p)

5. Betrakta de primala och duala linjärprogrammeringsproblemen (PLP) och (DLP) givna av

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{y} = (2 \ -1 \ 0)^T$ och $\widetilde{s} = (0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0)^T$. En person vars optimeringskunskaper du är tveksam till, nedan benämnd AF, påstår att $\widetilde{y}$ och $\widetilde{s}$ ger en optimallösning till (DLP).

(a) Gör en "kvalificerad gissning" utgående från $\widetilde{y}$ och $\widetilde{s}$ för att identifiera en basmatris sådan att motsvarande baslösning $\widetilde{x}$ uppfyller $c^T\widetilde{x} = b^T\widetilde{y}$. Visa att $\widetilde{x}$ inte är tillåten till (PLP). .... (4p)

(b) Ditt resultat i (5a) indikerar att AF har fel, eller hur? Du har en basmatris som ger en dualt tillåten lösning $\widetilde{y}$, $\widetilde{s}$. Lös (DLP) med (duala) simplexmetoden utgående från denna lösning. .... (6p)

Ledning: En iteration räcker i detta fall för att hitta optimallösningen. Du har tagit fram en basmatris B. Använd $\widetilde{x}_B$ för att bestämma lämplig enhetsvektor e_j för vilken du löser $B^T v = -e_j$. Bestäm sedan maximal steglängd α så att $\widetilde{y} + \alpha v$ och $\widetilde{s} - \alpha A^T v$ är dualt tillåten. Genomför basbyte och visa att motsvarande baslösning är primalt tillåten.

Lycka till!