KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 23 april 2001 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1.
(a) Ja.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Nej.
(e) Ja.

2. Då $g_2(x^*) > 0$ måste vi ha $g_2(x) \geq 0$.

Vi försöker nu hitta $\lambda_1 \geq 0$ och $\lambda_3 \geq 0$ så att

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_3.$$

Lösning finns för $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_3 = 3$. Därmed måste vi ha $g_1(x) \leq 0$ och $g_3(x) \geq 0$. Det återstår nu att visa att detta val ger en lokal minpunkt. De bindande bivillkorens Jakobian i x^* ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då de första två kolumnerna bildar en inverterbar matris, får vi exempelvis Z ur

$$Z = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed får vi

$$Z^T(\nabla^2 f(x^*) - \lambda_1 \nabla^2 g_1(x^*) - \lambda_3 \nabla^2 g_3(x^*))Z = \ldots = 2Z^T Z = 4,$$

vilket är en positivt definit matris. Eftersom vi dessutom har strikt komplementaritet har vi visat att x^* är en lokal minpunkt till det problem vi får då bivillkoren väljs enligt $g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \geq 0$ och $g_3(x) \geq 0$.

3. (a) Problemet kan skriva som

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Med $g(x) = Ax - b$, $G(x) = \text{diag}(g(x))$ och $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} H & -A^T \\ \Lambda A & G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Hx - A^T \lambda \\ \Lambda g(x) - \mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) En approximation av $x(1)$ ges av $x + \Delta x$ för de givna x och Δx, vilket ger

$$x(1) \approx x + \Delta x = \begin{pmatrix} 27/14 & 9/7 \end{pmatrix}^T.$$

Det är rimligt att välja steglängden ett, eftersom $A(x+\Delta x) > b$ och $\lambda+\Delta\lambda > 0$. Vi har att $\lim_{\mu \to 0} x(\mu)$ är optimallösningen, alltså $(1.6\ 0.8)^T$.
(Genom att fortsätta Newtoniterationerna får man $x(1) \approx (1.8508\ 1.0902)^T$, varför approximationen ovan är ganska bra.)

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Optimalitetsvillkoren till (LP) ges av

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, \\ s &\geq 0, \\ x_j s_j &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Optimalitetsvillkoren till (NLP) ges av

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x_j &= w_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \\ A^T y + s &= c, \\ 2 w_j s_j &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Vi ser att om $x_j = w_j^2$ så gäller att $2w_j s_j = 0$ om och endast om $x_j s_j = 0$. Därmed kan vi eliminera w ur optimalitetsvillkoren till (NLP), vilket ger de ekvivalenta villkoren

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, \\ x_j s_j &= 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Vi ser att skillnaden mellan optimalitetsvillkoren är att för (LP) har vi kravet $s \geq 0$.

(b) Vi ser från ovan att punkter som uppfyller första ordningens optimalitetsvillkor för (NLP) inte nödvändigtvis är lösningar till (LP). Därmed löser vi alltså inte (LP) med vår metod. Omformuleringen av (LP) till (NLP) ger ett ickekonvext problem, och den är alltså inte speciellt lyckad.