KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 8 april 2002 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

---

1. (a) Ja.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) Målfunktionen är $f(x) = e^{x_1} + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$. Derivering ger

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Speciellt får vi $\nabla f(\tilde{x}) = (1\ {-2}\ 2)^T$. Med $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 10$ får vi $g_1(\tilde{x}) = 9$, vilket innebär att bivillkor 1 inte är aktivt i $\tilde{x}$. Då $\nabla f(\tilde{x}) \neq 0$ måste därför bivillkor 2 vara aktivt med ickenegativ lagrangemultiplikator för att $\tilde{x}$ ska kunna uppfylla första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor. Vi får $\nabla f(\tilde{x}) = a\tilde{\lambda}_2$, där $\tilde{\lambda}_2 \geq 0$ samt $a^T\tilde{x} = b$.
Villkoret $\nabla f(\tilde{x}) = a\tilde{\lambda}_2$ kan inte uppfyllas då $\tilde{\lambda}_2 = 0$. Därmed kan vi välja $\tilde{\lambda}_2$ till godtyckligt positivt tal, exempelvis $\tilde{\lambda}_2 = 1$. Därmed blir $a = \nabla f(\tilde{x}) = (1\ {-2}\ 2)^T$ och slutligen $b = a^T\tilde{x} = 2$.
Om $a = (1\ {-2}\ 2)^T$ och $b = a^T\tilde{x} = 2$ uppfyller alltså $\tilde{x}$ första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor tillsammans med $\tilde{\lambda} = (0\ 1)^T$.

(b) Då vi endast har ett linjärt aktivt bivillkor i $\tilde{x}$ får vi

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = \nabla^2 f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dessutom har vi $A_A(\tilde{x}) = a^T$, där vi kan låta $a^T = (B\ N)$ för $B = 1$ och $N = (-2\ \ 2)$. Därmed får vi en bas

$$Z_A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$Z_A(\tilde{x})^T \nabla^2 f(\tilde{x}) Z_A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Men $Z_A(\tilde{x})^T \nabla^2 f(\tilde{x}) Z_A(\tilde{x}) \not\succeq 0$ eftersom $Z_A(\tilde{x})^T \nabla^2 f(\tilde{x}) Z_A(\tilde{x})$ är en 2×2-matris med negativ determinant. Därmed uppfyller $\tilde{x}$ inte andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor och är alltså inte en lokal minpunkt.

4. (a) För ett givet $x^{(k)}$ och $\lambda^{(k)}$ får QP-subproblemet formen

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})p + \nabla f(x^{(k)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(k)})^T p \geq -g_1(x^{(k)}), \\ & \nabla g_2(x^{(k)})^T p \geq -g_2(x^{(k)}). \end{array}$$

Derivering ger

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -8x_1 - 2x_2 + 12 \\ -2x_1 - 14x_2 + 12 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Insättning av $x = (0\ 0)^T$ och $\lambda = (1\ 1)^T$ ger QP-subproblemet

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{9}{2}p_1^2 + 2p_1p_2 + \frac{15}{2}p_2^2 + p_1 + p_2 \\ \text{då} & 12p_1 + 12p_2 \geq 8, \\ & 4p_2 \geq 1. \end{array}$$

Vi ska nu verifiera att $p^* = (5/12\ 1/4)^T$ är optimal till (QP) med multiplikatorvektor $\lambda^* = (7/16\ 1/12)^T$. Då $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ samt $\nabla^2 g_i(x) \preceq 0$, $i = 1, 2$, är (NLP) ett konvext problem. Därmed blir (QP) konvext. Insättning i bivillkoren ger att p^* är en tillåten punkt till (QP) där båda bivillkoren är aktiva. Villkoret $\lambda^* \geq 0$ är uppfyllt. Dessutom krävs

$$\begin{pmatrix} 9p_1^* + 2p_2^* + 1 \\ 2p_1^* + 15p_2^* + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix}.$$

Insättning ger att även detta är uppfyllt. Konvexitet hos (QP) ger därmed att p^* är globalt optimal till (QP) med tillhörande multiplikatorvektor λ^*.

(b) Vi ser att konvergens sker mot en punkt som uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor, dvs en tillåten punkt där lagrangefunktionen är noll, multiplikatorerna är ickenegativa samt komplementaritet gäller. Eftersom (NLP) är ett konvext problem blir därmed punkten en global minpunkt.

5. (a) Det duala problemet kan exempelvis skrivas på formen

$$(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & y \\ \text{då} & Iy \preceq M. \end{array}$$

(b) Låt $\eta_i(M)$, $i = 1, \ldots, n$, beteckna egenvärdena till M. Om vi adderar en multipel av enhetsmatrisen till M skiftas egenvärdena med multipeln. Därmed får matrisen $M - Iy$ egenvärdena $\eta_i(M) - y$. Alltså blir y tillåten till $(DSDP)$ om och endast om $y \leq \eta_{\min}(M)$, där $\eta_{\min}(M)$ betecknar det minsta egenvärdet till M. Därmed blir optimalt y det minsta egenvärdet till M, vilket alltså är optimalvärdet till $(DSDP)$.

(c) Om vi restrifierar X till att ha formen xx^T i $(PSDP)$ får vi problemet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(Mxx^T) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(xx^T) = 1. \end{array}$$

Då $\operatorname{trace}(Axx^T) = x^TAx$ för en symmetrisk $n \times n$-matris A kan (P) ekvivalent skrivas

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & x^TMx \\ \text{då} & x^Tx = 1. \end{array}$$

Optimalvärdet till (P) är minsta egenvärdet till M och optimallösningen x^* är en egenvektor av norm ett som svarar mot detta egenvärde. Då (P) är en restrifiering av $(PSDP)$ är optimalvärdet till (P) minst lika stort som optimalvärdet till $(DSDP)$. Vårt val av x^* ger samma målfunktionsvärde i (P) som optimalvärdet till $(DSDP)$. Därmed är x^* optimallösning till (P) vilket medför att x^*x^{*T} är optimallösning till $(PSDP)$.