KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 28 april 2003 kl. 14.00–19.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Båda bivillkoren är aktiva i $\bar{x}$. Första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor kräver att det finns $\bar{\lambda} \in I\!R^2$, $\bar{\lambda} \geq 0$ så att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix}.$$

Detta system har dock ingen lösning, varför inte $\bar{x}$ uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor, och därmed heller inte andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor.

(b) Om vi adderar bivillkoren $-x_2 + x_1^3 \geq 0$ och $x_2 + x_1^3 \geq 0$ får vi $2x_1^3 \geq 0$, vilket är ekvivalent med $x_1 \geq 0$. Målfunktionen blir därmed nedåt begränsad av noll. Då $\bar{x}$ ger målfunktionsvärde noll är det därmed en global minpunkt. (Följaktligen också en lokal minpunkt.)

(c) Punkten $\bar{x}$ är inte reguljär. Därmed måste inte andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor vara uppfyllda för att $\bar{x}$ ska vara en lokal minpunkt till (NLP). Alltså är svaren konsistenta.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Det primal-duala ekvationssystemet blir

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda &= 0, \\ 2x_2 - \lambda &= 0, \\ (x_1 + x_2 - 1)\lambda - \mu &= 0. \end{aligned}$$

Eliminering av x_1 och x_2 ger $(\lambda + \lambda/2 - 1)\lambda - \mu = 0$, eller ekvivalent

$$\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}\mu = 0.$$

Därmed får vi

$$\lambda = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\mu} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6\mu}}{3}.$$

Eftersom $\lambda(\mu) > 0$ får vi

$$\lambda(\mu) = \frac{1 + \sqrt{1 + 6\mu}}{3}.$$

Insättning av $\lambda(\mu)$ ger

$$x(\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \sqrt{1 + 6\mu}}{3} \\[2mm] \dfrac{1 + \sqrt{1 + 6\mu}}{6} \end{pmatrix}.$$

(b) Det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \lambda & \lambda & x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ 2x_2 - \lambda \\ (x_1 + x_2 - 1)\lambda - \mu \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exempelvis kan Δx_1 och Δx_2 uttryckas i $\Delta\lambda$, vilket ger $\Delta\lambda = -3/4$. Insättning ger $\Delta x_1 = 1/4$ och $\Delta x_2 = -3/8$. Steglängd ett är tillåtet med avseende på kraven $x_1 + x_2 > 1$ och $\lambda > 0$. Därmed kan vi välja steglängd ett och får nya iterationspunkter ur

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.625 \end{pmatrix}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 1.25.$$

Vi kan jämföra med

$$x(1) \approx \begin{pmatrix} 1.21525 \\ 0.60763 \end{pmatrix}, \quad \lambda(1) \approx 1.21525.$$

Det nya estimatet är alltså relativt bra.

5. (a) I initialpunkten x^0 fås lagrangemultiplikatorerna ur $Hx^0 + c = A^{0T}\lambda^0$, dvs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \\ \lambda_4^0 \end{pmatrix},$$

dvs $\lambda^0 = (-1\ \ -2\ \ 3\ \ 6\ \ 0)^T$. Bivillkor 1 och 2 har negativa multiplikatorer. Vi kan exempelvis släppa bivillkor 1, vilket ger sökriktning p^0 och multiplikator λ^1 ur

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ -\lambda_2^1 \\ -\lambda_3^1 \\ -\lambda_4^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^0 = (1/2\ 0\ 0\ 0)^T$ och $\lambda^1 = (0\ \ -1/2\ \ 3\ \ 6\ \ 0)^T$.

Maximal steglängd är 2, varför steglängd 1 väljs. Alltså blir nya iterationspunkten $x^1 = (1/2\ 0\ 0\ 0)^T$ med $\lambda^1 = (0\ \ -1/2\ \ 3\ \ 6\ \ 0)^T$.

(Den nya punkten är inte optimal, då $\lambda_2^1 < 0$. Man får optimal lösning $x^* = (0\ 2/5\ 0\ 0)^T$ om släpper bivillkor 2 istället för bivillkor 1.)

(b) Både bivillkor 1 och 2 har negativa multiplikatorer. Om båda dessa bivillkor släpps, får vi sökriktning p^0 och multiplikator λ^1 ur

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ -\lambda_3^1 \\ -\lambda_4^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^0 = (-1\ 1\ 0\ 0)^T$ och $\lambda^1 = (0\ \ 0\ \ 3\ \ 6\ \ 0)^T$.

Steget begränsas inte av bivillkoret $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -1$. Däremot är $p_1 < 0$, varför vi omedelbart bryter mot bivillkoret $x_1 \geq 0$, som släpptes. Maximal steglängd blir därför noll, vilket ger $x^1 = \bar{x}$.

(c) Egenskapen att sökriktningen inte bryter mot de bivillkor som släpps tappas om vi tillåter mer än ett bivillkor åt gången att släppas. Detta leder till komplikationer hos metoden, vilket illustrerats ovan.