KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 26 augusti 2003 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Målfunktionen är differentierbar överallt eftersom de givna punkterna är olika. Eftersom vi har ett konvext problem är nödvändigt och tillräckligt villkor för global optimalitet att målfunktionens gradient är noll, dvs

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_1 - p_i}{\sqrt{(x_1-p_i)^2 + (x_2-q_i)^2}} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_2 - q_i}{\sqrt{(x_1-p_i)^2 + (x_2-q_i)^2}} = 0.$$

(b) Om vi låter $f_2(x)$ beteckna målfunktionen får vi

$$\nabla f_2(0) = \begin{pmatrix} -2\sum_{i=1}^m p_i \\ -2\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_2(0) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Newtonriktningen, och nya iterationspunkten, ges av

$$-\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2\sum_{i=1}^m p_i \\ -2\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m p_i \\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix}.$$

Då problemet är kvadratiskt med positivt definit Hessian har vi globalt optimum efter en iteration.

3. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)},\lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})\, p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & 5p_1^2 + 5p_2^2 - 10p_1 - 10p_2 \\ \text{då} & -p_1 - p_2 \geq -1, \\ & p_1 \geq 0, \\ & p_2 \geq 0. \end{array}$$

Detta kan lösas geometriskt, då vi söker den tillåtna punkt som ligger närmast $(1\ 1)^T$. Optimallösningen blir då $p^{(0)} = (1/2\ 1/2)^T$, vilket ger

$$x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (1/2\ 1/2)^T.$$

Bivillkor 1 är bindande. Multiplikatorns värde ges av

$$10p_1^{(0)} - 10 = -\lambda_1^{(1)},$$
$$10p_2^{(0)} - 10 = -\lambda_1^{(1)},$$

vilket ger $\lambda^{(1)} = (5\ 0\ 0)^T$.

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Vi får $Ix \succeq A \succeq -Ix$ om och endast om x är minst lika stort som det till beloppet största egenvärdet till A. Därmed ser vi att optimallösningen (och optimalvärdet) till (SDP) är det till beloppet största egenvärdet till A. (Eftersom A är symmetrisk är det samma sak som största singulärvärdet till A.)

(b) Vi kan skriva om (SDP) på ekvivalent form som

$$(SDP') \quad \begin{array}{ll} -\max & -x \\ \text{då} & -Ix \preceq A, \\ & -Ix \preceq -A. \end{array}$$

Dualen till detta problem ges av

$$(DSDP') \quad \begin{array}{ll} -\min & \operatorname{trace}(AY_1) - \operatorname{trace}(AY_2)) \\ \text{då} & -\operatorname{trace}(Y_1) - \operatorname{trace}(Y_2) = -1, \\ & Y_1 = Y_1^T \succeq 0, \quad Y_2 = Y_2^T \succeq 0, \end{array}$$

vilket ekvivalent kan skrivas som

$$(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & -\operatorname{trace}(AY_1) + \operatorname{trace}(AY_2)) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(Y_1) + \operatorname{trace}(Y_2) = 1, \\ & Y_1 = Y_1^T \succeq 0, \quad Y_2 = Y_2^T \succeq 0. \end{array}$$

(c) Låt η vara det till beloppet största egenvärdet till A, och låt u vara en motsvarande egenvektor där $u^T u = 1$. Om $\eta \leq 0$, låt $Y_1 = uu^T$, $Y_2 = 0$, och om $\eta > 0$, låt $Y_1 = 0$, $Y_2 = uu^T$. Då blir i båda fallen Y_1 och Y_2 tillåtna till $(DSDP)$ med målfunktionsvärde $|\eta|$, vilket är optimalt.