KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 23 april 2004 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. Vi har $H \succ 0$, varför (QP) är ett konvext problem. Optimalitetsvillkoren till (P_μ) ges av det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ Hx - A^T y - s &= -c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där $X = \mathrm{diag}(x)$, $S = \mathrm{diag}(s)$ och $e = (1\ 1\ 1)^T$, samt $x > 0$ och $s > 0$. För enkelhet i notation låter vi x beteckna $x(2)$, y beteckna $y(2)$ och s beteckna $s(2)$. Första blocket ekvationer är uppfyllt för det givna x. Insättning av $\mu = 2$ tillsammans med det givna x i det tredje blocket ger

$$s = \mu X^{-1} e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insättning i andra blocket ger att det måste finnas y så att $A^T y = Hx + c - s$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Vi får lösning för} \quad y = 3.$$

Eftersom dessutom $x > 0$ och $s > 0$ har vi uppfyllt optimalitetsvillkoren. Alltså är den föreslagna lösningen optimal till (P_2).

3. (Se kursmaterialet.)

4. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} p^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(0)})^T p = -g_1(x^{(0)}), \\ & \nabla g_2(x^{(0)})^T p \geq -g_2(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 - 4p_2 \\ \text{då} & -p_1 + p_2 = 0, \\ & p_1 + p_2 \geq 2. \end{array}$$

Likhetsbivillkoret ger $p_1 = p_2$, varför vi får

$$\begin{array}{ll} \min & 2p^2 - 6p \\ \text{då} & 2p \geq 2. \end{array}$$

Optimallösningen är $p = 3/2$, varför vi får $p^{(0)} = (3/2\ 3/2)^T$, vilket ger

$$x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (3/2\ 3/2)^T.$$

Bivillkor 1 är bindande. Multiplikatorns värde ges av

$$\begin{aligned} 2p_1^{(0)} - 2 &= -\lambda_1^{(1)}, \\ 2p_2^{(0)} - 4 &= \lambda_1^{(1)}, \end{aligned}$$

vilket ger $\lambda^{(1)} = (-1\ 0)^T$.

5. (a) Om vi skriver det ickelinjära ekvationssystemet på symmetrisk form får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}(Y) &= 1, \\ \tfrac{1}{2}(Ix - M)Y + \tfrac{1}{2}Y(Ix - M) &= \mu I. \end{aligned}$$

Dessutom krävs $Ix \succ M$ och $Y \succ 0$. Vi låter $\widetilde{x}$ och $\widetilde{Y}$ beteckna de givna approximationerna av $x(0.01)$ och $Y(0.01)$. Om vi låter $\mu = 0.01$ och sätter in de föreslagna approximationerna får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}(\widetilde{Y}) - 1 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}(I\widetilde{x} - M)\widetilde{Y} + \tfrac{1}{2}\widetilde{Y}(I\widetilde{x} - M) - 0.01I &\approx 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0.3696 & -0.2608 \\ -0.2608 & 0.6304 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De ickelinjära ekvationerna har en residual av storleksordning 10^{-4}, vilket stämmer väl med noggrannheten hos $\widetilde{x}$ och $\widetilde{Y}$. Vi har också $\widetilde{Y} \succ 0$.

(b) Optimalvärdet, liksom optimallösningen, till $(PSDP)$ är största egenvärdet till M. Varje tillåtet x i $(PSDP)$ ger därför en överskattning av största egenvärdet till M. Då μ är 0.01, förväntar vi oss att $\widetilde{x}$ är en relativt god approximation av största egenvärdet till M.
(Vi kan förvänta oss att $\widetilde{x}$ är av storleksordningen μ för stort. Det stämmer också bra, eftersom $\widetilde{x} = 3.6281$ och $\eta_{\max}(M) = (5 + \sqrt{5})/2 \approx 3.6180$.)