KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Torsdagen den 16 december 2004 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Nej.

(b) Nej.

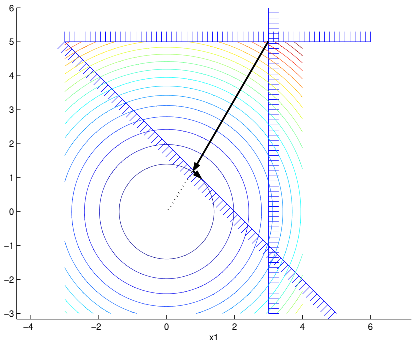
(c) Ja.

(d) Ja.

(e) Nej.

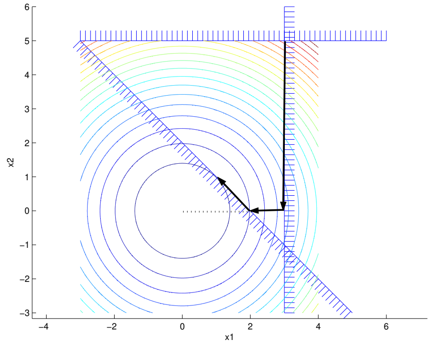
2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) Iterationsförloppet för de två iterationerna illustreras i nedanstående figur:



I första iterationen pekar sökriktningen på $(0\ 0)^T$. Steglängden begränsas av bivillkor 1, som blir aktivt. I andra iterationen pekar sökriktningen på $(1\ 1)^T$, vilket också är tillåtet. Det lönar sig inte att släppa bivillkor 1, och vi är klara.

(b) Iterationsförloppet för de tre iterationerna illustreras i nedanstående figur:



I första iterationen pekar sökriktningen på $(3\ 0)^T$, som är tillåten. Det lönar sig nu att släppa bivillkor 2. I andra iterationen pekar sökriktningen på $(0\ 0)^T$. Steglängden begränsas av bivillkor 1, som blir aktivt. I tredje iterationen pekar sökriktningen på $(1\ 1)^T$, vilket också är tillåtet. Det lönar sig inte att släppa bivillkor 1, och vi är klara.

(c) Den punkt vi funnit har bivillkoret $x_1 + x_2 \geq 2$ aktivt. Optimalitetsvillkoren ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

vilket har lösning $x = (1\ 1)^T$, $\lambda_1 = 1$. Då $\lambda_1 \geq 0$ är första ordningens optimalitetsvillkor uppfyllda. Eftersom $H \succ 0$ är den funna punkten en global optimalpunkt.

4. Vi har

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1-2)^2 + \frac{1}{2}(x_2-3)^2, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Newtonsteget Δx, $\Delta \lambda$ ges av

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x,\lambda) & A(x)^T \\ \Lambda A(x) & -G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta\lambda \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \nabla f(x) - A(x)^T\lambda \\ G(x)\lambda - \mu e \end{pmatrix},$$

där $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda)$ och $G(x) = \operatorname{diag}(g(x))$.

Insättning ger det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ -\Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningen ges av $\Delta x = (-1/7 \;\; 1)^T$, $\Delta\lambda = -4/7$.

Steglängden α bör bestämmas så att $g(x + \alpha\Delta x) > 0$ och $\lambda + \alpha\Delta\lambda > 0$. Detta gäller för $\alpha = 1$. Om vi, för enkelhets skull, bortser från krav från en meritfunktion och väljer $\alpha = 1$, får vi $x^1 = (6/7 \;\; 1)^T$ och $\lambda^1 = 10/7$. (Vi har $x(2) \approx (0.5954 \; 0.8931)^T$ och $\lambda(2) \approx 2.3590$.)

5. (a) Om vi bortser från bivillkoret $a^T x = b$ är x^* inte en lokal minpunkt. Då sönderfaller problemet i

$$(P_1) \quad \begin{array}{ll} \min & \tilde{f}(x_1, x_2) \\ \text{då} & x \in I\!R^2, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (P_2) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x_3^2 - x_4^2 - x_3 + 2x_4 \\ \text{då} & 2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 \geq 0. \end{array}$$

Då $\nabla^2 \tilde{f}(x_1, x_2) \succ 0$ och $\nabla \tilde{f}(1,1) = 0$ följer att $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$ är globalt optimal till (P_1). Bivillkoret i (P_2) är inaktivt då $x_3 = 1$ och $x_4 = 1$. Därmed är $(1 \; 1)^T$ inte en lokal minpunkt till (P_2), eftersom gradienten är noll, men Hessianen inte är positivt semidefinit. Om man bortser från bivillkoret är (P_2) ett separabelt problem, där $x_3 = 1$ är global minpunkt till $\min \frac{1}{2}x_3^2 - x_3$, men $x_4 = 1$ inte är en minpunkt till $\min -x_4^2 + 2x_4$. Den negativa krökningen kommer alltså från x_4, så om vi eliminerar x_4 genom att sätta $x_4 = 1$ blir det resulterande problemet konvext, och $(1 \; 1)^T$ blir en global minpunkt. Sammantaget kan vi låta $a = (0 \; 0 \; 0 \; 1)^T$ och $b = 1$, så blir x^* globalt optimal till det resulterande problemet.

(b) Vi har ovan sett att x^* inte blir en lokal minpunkt då bivillkoret inte är bindande. Den enda möjligheten är därmed $c = 1$, då bivillkoret blir bindande i x^*. Precis som ovan sönderfaller det i två problem, och endast problemet i x_3 och x_4 är intressant eftersom $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$ är global minpunkt till (P_1). För att förenkla notationen, låt $y_1 = x_3$ och låt $y_2 = x_4$. Då får vi

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}y_1^2 - y_2^2 - y_1 + 2y_2 \\ \text{då} & 1 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 \geq 0. \end{array}$$

Låt $y^* = (1 \; 1)^T$. Då blir y^* en reguljär punkt, och för att y^* ska vara en lokal minpunkt måste det finnas ickenegativ λ^* så att $\nabla f(y^*) = \nabla g(y^*)\lambda^*$, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda^*,$$

vilket ger $\lambda^* = 0$. För att kontrollera andra ordningens nödvändiga villkor, låt $Z^* = (1 \;\; -1)^T$. Då bildar Z^* en bas för $\operatorname{null}(\nabla g(y^*)^T)$. Vi får

$$Z^{*T} \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) Z^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Därmed går andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor inte att uppfylla, vilket medför att vi inte kan hitta ett värde på c så att x^* blir en lokal minpunkt till det givna problemet.