KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 20 december 2005 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Ja.

(b) Nej.

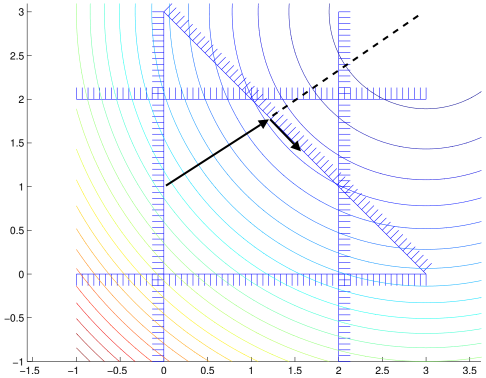
(c) Nej.

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (Se kursmaterialet.)

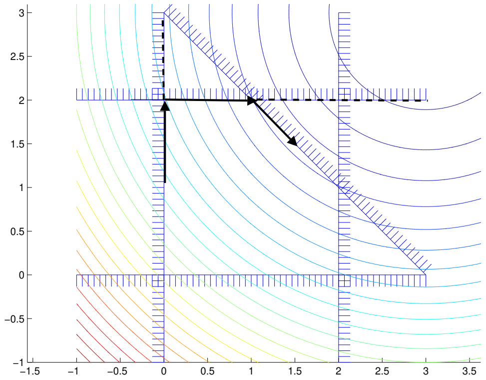
3. (a) Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är inga bivillkor aktiva. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 3 aktivt.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^2. Bivillkor 3 har nu positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(b) Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är bivillkor 4 aktivt. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 4 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 2, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 2 och bivillkor 4 aktiva.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 och 4 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^2 = x^1$.

I x^2 har vi bivillkor 2 och 4 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 4 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^3. Därmed blir bivillkor 2 och 3 aktiva.

I x^3 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 och 3 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^4 = x^3$.

I x^4 har vi bivillkor 2 och 3 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 2 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^5. Bivillkor 3 har nu positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(c) Man ser ur figur att $x^* = (3/2\ \ 3/2)^T$ får vi $Hx^* + c = (-3/2\ \ -3/2)^T$. Då $A_A = (-1\ -1)$ får vi $A_A x^* = -3 = b_A$. Dessutom blir $Hx^* + c = A_A^T \lambda^*$ för $\lambda^* = 3/2$. Då $\lambda^* > 0$ samt dessutom $Ax^* \geq b$ samt $H \succ 0$ gäller att x^* är globalt optimal till (QP).

4. Vi har

$$f(x) = -10x_1$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = x_1, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})^T p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

(a) Insättning av numeriska värden ger

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^{(0)})^T = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning, exempelvis grafiskt, ger $p^{(0)} = (8/3\ 0)^T$. Bivillkor 1 är aktivt med muliplikatorvektor $\lambda^{(1)} = (7/9\ 0)^T$. Därmed får vi $x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (17/3\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (7/9\ 0)^T$.

(b) Insättning av numeriska värden ger

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^{(0)})^T = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning, exempelvis grafiskt, ger $p^{(0)} = (1/2\ 0)^T$. Inget bivillkor är aktivt. Därmed får vi $x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (7/2\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (0\ 0)^T$.

(c) Vi ser att $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x, \lambda) \succ 0$ om och endast om $\lambda_1 > 0$. Därmed blir $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) \succ 0$ i (4a), men $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) = 0$ i (4b). Man bör alltså modifiera i (4b), exempelvis genom att modifiera $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x, \lambda)$ till en positivt definit matris.

5. (a) Vi kan exempelvis studera Hessianen till målfunktionen, vilket ger

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

Om vi låter $A = 2/x_2$, $B = -2x_1/x_2^2$ och $C = 2x_1^2/x_2^3$ får vi $A > 0$ och $C - B^2/A = 0$ om $x_2 > 0$. Alltså ger ledningen att $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ för $x_2 > 0$. Därmed blir f konvex på tillåtna området.

(b) Problemet (NLP) är ekvivalent med (NLP') enligt

$$(NLP') \quad \begin{array}{ll} \min & x_3 \\ \text{då} & x_3 \geq \frac{x_1^2}{x_2} + x_2, \\ & x_1 \geq 5, \\ & x_2 \geq 1. \end{array}$$

För $x_2 > 0$ får vi

$$x_3 \geq \frac{x_1^2}{x_2} + x_2 \quad \Leftrightarrow x_3 - x_2 - \frac{x_1^2}{x_2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

där ledningen använts i sista ledet med $A = x_2$, $B = x_1$ och $C = x_3 - x_2$. Därmed är (NLP') och (SDP) ekvivalenta.

(Vi kan se genom inspektion att optimallösningen är $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = 10$.)