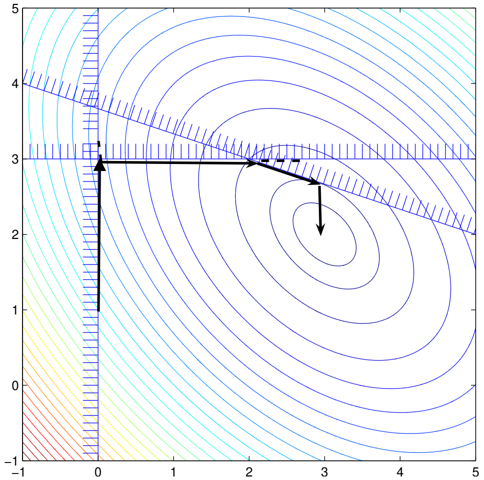
KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 9 juni 2006 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Nej.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är bivillkor 1 aktivt. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 2, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 1 och bivillkor 2 aktiva.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 och 2 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^2 = x^1$.

I x^2 har vi bivillkor 1 och 2 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 1 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^3. Därmed blir bivillkor 2 och 3 aktiva.

I x^3 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 och 3 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^4 = x^3$.

I x^4 har vi bivillkor 2 och 3 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 2 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^5.

I x_5 har vi bivillkor 3 aktivt. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 3 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen utan bivillkor. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^6. Därmed har vi hittat optimalpunkten.

(b) Man ser ur figur att $x^* = (3\ 2)^T$. Vi får $Hx^* + c = (0\ 0)^T$. Då $H \succ 0$ gäller att x^* är globalt optimal till (QP).

3. (Se kursmaterialet.)

4. Vi skriver de åtta bivillkoren i ordning $x_j \geq l_j$, $j = 1, \ldots, 4$, och $-x_j \geq -u_j$, $j = 1, \ldots, 4$, och låter motsvarande lagrangemultiplikatorer ges av λ_j, $j = 1, \ldots, 8$.

(a) Då $\nabla f(x^*)$ har två nollskilda komponenter, komponent 1 negativ och komponent 4 positiv, får vi första ordningens villkor uppfyllda genom att välja $u_1 = 0$ och $l_4 = 0$. Då blir $\lambda_4 = 2$ och $\lambda_5 = 1$, övriga sex $\lambda_j = 0$.

(b) Med $u_1 = 0$ och $l_4 = 0$ får vi en matris Z vars kolumner bildar bas för nollrummet till de aktiva bivillkoren som

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då bivillkoren är linjära får vi $\nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda) = \nabla^2 f(x^*)$. Därmed blir

$$Z^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda) Z = Z^T \nabla^2 f(x^*) Z = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Därmed blir reducerade Hessianen inte positivt semidefinit. Variablerna x_2 och x_3 är fria. Vi ser att om vi låser x_3 försvinner den negativa krökningen i reducerade Hessianen. Alltså, låt också $l_3 = 0$ eller $u_3 = 0$ så uppfyller x^* andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för det resulterande problemet.

(c) Nej, det kan vi inte garantera då ett aktivt olikhetsbivillkor har en lagrangemuliplikator som är noll.

5. (a) Vi har $x_j(1 - x_j) \geq 0$ om och endast om $0 \leq x_j \leq 1$. Alltså kan (NLP)

ekvivalent skrivas om som

$$
(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ \text{då} & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & -x_j \geq -1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & x \in I\!R^n. \end{array}
$$

(b) Om vi barriärtransformerar (NLP) blir den resulterande barriärfunktionen

$$
f_\mu(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln(x_j(1 - x_j)).
$$

Då $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ för positiva a och b kan vi ekvivalent skriva barriärfunktionen som

$$
f_\mu(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln(1 - x_j),
$$

vilket är barriärfunktionen som svarar mot (QP). Därmed har problemen samma barriärfunktioner, och därmed också samma minpunkter till de barriärtransformerade problemen.