KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 28 augusti 2001 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att man använder en "active set"-metod för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^THx + c^Tx \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där H är en positivt semidefinit kvadratisk matris. Om $x^{(0)}$ väljs så att $Ax^{(0)} \geq b$, är då att samtliga iterationspunkter $x^{(k)}$, $k \geq 0$, tillåtna till (P)? ......(1p)

(b) Låt $f : I\!R^n \to I\!R$ vara två gånger kontinuerligt deriverbar med $\nabla^2 f(x)$ positivt definit för alla $x \in I\!R^n$. Antag att man vill minimera f med Newtons metod och beräknar Newton-riktningen p i en viss punkt $x^{(0)}$. Kan $x^{(0)}$ vara en lokal minpunkt om $p \neq 0$? ......(1p)

(c) Låt $A \in I\!R^{n\times n}$ och $b \in I\!R^n$. Gäller då alltid att steepest-descentmetoden (med exakt linjesökning) löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2}x^TAx + b^Tx$$

i högst n iterationer om A är symmetrisk och positivt definit? ......(1p)

(d) Antag att H är en positivt definit symmetrisk $n\times n$-matris, och antag vidare att Z är en $n \times m$-matris med linjärt oberoende kolumner. Är då Z^THZ garanterat positivt definit? ......(1p)

(e) Låt mängden C definieras av

$$C = \left\{ Z \in I\!R^{m\times m} : Z = Z^T \succeq 0, \mathrm{trace}(A_jZ) = c_j, j = 1, \ldots, n \right\},$$

där A_j, $j = 1, \ldots, n$, är givna symmetriska $m \times m$-matriser och c är en given vektor i $I\!R^n$. Är C konvex? ......(1p)

2. Betrakta NLP-problemet

$$
(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}
$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^3$ är två gånger kontinuerligt deriverbara.

Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi startar i punkten $x^{(0)} = (0\ 0)^T$ där

$$
\begin{array}{lll}
f(x^{(0)}) = 0, & \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T, & \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
g_1(x^{(0)}) = 1, & \nabla g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T, & \nabla^2 g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \\
g_2(x^{(0)}) = 0, & \nabla g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, & \nabla^2 g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
g_3(x^{(0)}) = -1, & \nabla g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T, & \nabla^2 g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Antag också att initiala uppskattningen av lagrangemultiplikatorerna, $\lambda^{(0)}$, väljs till $\lambda^{(0)} = (0\ 2\ 1)^T$.

Genomför en iteration med sekvensiell kvadratisk programmering, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. (Vi antar att ingen linjesökning behöver utföras.) Det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår för lösas på valfritt sätt, exempelvis grafiskt. ... (5p)

Anmärkning: I enlighet med bokens notation väljs tecknet på λ så att $l(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.

3. Betrakta problemet (P) definierat av

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in I\!R^n, \end{array}
$$

där f är två gånger kontinuerligt deriverbar. (Vi har alltså inga bivillkor i problemet.)

(a) Hur lyder definitionen av att x^* är en lokal optimalpunkt till (P)? ...... (1p)

(b) Hur lyder definitionen av att x^* är en global optimalpunkt till (P)? ..... (1p)

(c) Antag att f är konvex på $I\!R^n$, och att x^* är en lokal optimalpunkt till (P). Visa att x^* då är en global optimalpunkt till (P). .... (3p)

4. Betrakta det ickekonvexa kvadratiska programmeringsroblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2 + x_4^2 + x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ \text{då} & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & 0 \leq x_3 \leq 2, \\ & x_4 \geq 0. \end{array}$$

Låt $\widehat{x} = (0\ 0\ 1\ 1)^T$.

(a) Visa att $\widehat{x}$ *inte* är en lokal minpunkt till (QP). .... (3p)

(b) Ange ett linjärt likhetsbivillkor som man kan lägga till (QP) så att $\widehat{x}$ blir en lokal minpunkt till det nya problemet. Motivera svaret ordentligt. .... (2p)

5. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & Ix \succeq A, \end{array}$$

där A är en given symmetrisk matris och I är enhetsmatrisen av samma dimension. (Observera att x är en skalär variabel.)

(a) Förklara i ord vad optimallösningen till (SDP) är. .... (1p)

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm den primala delen $x(\mu)$ av den primal-duala trajektorian till (SDP) för detta val av A. Bestäm härur optimallösningen till (SDP) för detta val av A. .... (4p)

Lycka till!