KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Torsdagen den 6 mars 2003 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ och $g : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Antag nu att x^* är en tillåten punkt till (P) sådan att $\nabla^2 f(x^*) \not\succeq 0$. Kan då x^* vara en lokal minpunkt till (P)? .... (1p)

(b) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Antag nu att x^* är en lokal minpunkt till (P) sådan att $\nabla^2 f(x^*)$ har k negativa egenvärden. Måste då garanterat minst k bivillkor vara aktiva i x^*? .... (1p)

(c) Antag att man använder en kvasi-Newton-metod för att lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in I\!\!R^n, \end{array}$$

men att man i iteration k, $(k \geq 2)$, istället för att uppdatera hessianapproximationen låter den vara lika med Hessianen av f i den nya punkten. Kommer då garanterat kvasi-Newton-villkoret att vara uppfyllt? .... (1p)

(d) Utgör problemen

$$\begin{array}{ll} \max & \operatorname{trace}(CX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_iX) = -b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & X = X^T \succeq 0, \end{array}$$

och

$$\begin{array}{ll} \min & b^Ty \\ \text{då} & \sum A_iy_i + S = -C, \\ & S = S^T \succeq 0, \end{array}$$

ett primal-dualt par av linjära semidefinita programmeringsproblem? ....(1p)

(e) Låt $A \in I\!\!R^{n\times n}$ och $b \in I\!\!R^n$. Gäller då alltid att Newtons metod (med exakt linjesökning) löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2}x^TAx + b^Tx$$

i högst en iteration om A är symmetrisk och positivt definit? ....(1p)

2. Betrakta det ickelinjära matematiska programmeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_1(x) \geq 0, \\ & g_2(x) = 0, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^3 \to I\!\!R$ och $g : I\!\!R^3 \to I\!\!R^2$ är två gånger kontinuerligt differentierbara.

Antag att vi har en punkt x^*, där $x^* = (0\ 0\ 0)^T$ och

$$f(x^*) = 5, \qquad \nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^*) = 2, \qquad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^*) = 0, \qquad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att x^* *inte* är en lokal minpunkt till (P). ....(3p)

(b) Lägg till ett bivillkor på formen $a^Tx = b$ till (P) så att x^* blir en lokal minpunkt till det nya problemet. Ange a och b, där $a \in I\!\!R^3$ och $b \in I\!\!R$. För att få poäng på uppgiften krävs motivering av valet. .... (2p)

3. Betrakta NLP-problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara.

En reguljär punkt x^* till bivillkoren är, som bekant, en punkt x^* sådan att $\nabla g_i(x^*)$, $i \in \{l : g_l(x^*) = 0\}$, är linjärt oberoende.

(a) Formulera andra ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). .... (2p)

(b) För det specialfall då $g(x) = Ax - b$, bevisa första ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). ..... (3p)

4. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2 \\ \text{då} & 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (1\ 1)^T$ och $\lambda^{(0)} = (1\ 0)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematisk. Till exempel kan du gissa optimallösningen ur en figur. Optimallösningen ska dock verifieras analytiskt. Din uppgift är alltså att ta fram $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. Linjesökning behöver inte genomföras. .... (5p)

5. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & \begin{pmatrix} Ix & A^T \\ A & Ix \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

där A är en given kvadratisk (men osymmetrisk) $n \times n$-matris och I är enhetsmatrisen av dimension n. (Observera att x är en skalär variabel.)

Matrisen A kan *singulärvärdesfaktoriseras* enligt $A = U\Sigma V^T$, där $U^T U = I$, $V^T V = I$, och $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma)$, där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Vi låter kolumn i i U respektive V betecknas med u_i respektive v_i, $i = 1, \dots, n$. Det innebär alltså att vi får

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i v_i^T.$$

(a) Förklara i ord vad optimallösningen till (SDP) är. .... (1p)
Ledning: Egenvärdena till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

ges av $\pm\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Ställ upp det duala problemet som svarar mot (SDP). .... (2p)

(c) Det duala problemet har en optimallösning som ges av en matris av rang ett, där denna matris är uppbyggd av u_1 och v_1, dvs de singulärvektorer som svarar mot största singulärvärdet σ_1. Bestäm denna optimallösning. Systematisk metod behöver inte användas. .... (2p)

Lycka till!