KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 28 april 2003 kl. 14.00–19.00.

<u>Examinator:</u> Anders Forsgren, tel 790 71 27

<u>Tillåtna hjälpmedel:</u> Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

<u>Lösningsmetoder:</u> Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

<u>OBS!</u> Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^THx + c^Tx \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där H är en positivt semidefinit symmetrisk kvadratisk $n \times n$ matris och A är en $m \times n$ matris, där $m \geq n$. Antag att (QP) har minst en optimallösning. Finns det då garanterat en optimallösning x^* till (QP) sådan att n bivillkor är aktiva i x^*? .... (1p)

(b) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering, och att den initiala punkten är tillåten. Blir då alla iterationspunkter garanterat tillåtna? ... (1p)

(c) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) = 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och g_i, $i = 1, \ldots, n$, är två gånger kontinuerligt deriverbara konvexa funktioner på $I\!R^n$. Låt x^* vara en lokal minpunkt till (NLP). Är x^* då också garanterat en global minpunkt till (NLP)? .... (1p)

(d) Låt $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ vara två gånger kontinuerligt deriverbar. Antag att man vill minimera f med steepest-descentmetoden. Antag också att man råkar starta i en lokal maxpunkt $x^{(0)}$ och där beräknar steepest-descentsökriktningen p. Blir då garanterat $p = 0$? .... (1p)

(e) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och konvex på $I\!\!R^n$. Antag att $\bar{x}$ och $\widehat{x}$ är globala optimallösningar till (P). Är då $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\widehat{x}$ garanterat en global optimallösning till (P)? .... (1p)

2. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (NLP) definierat av

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{då} & -x_2 + x_1^3 \geq 0, \\ & x_2 + x_1^3 \geq 0. \end{array}$$

Låt $\bar{x} = (0\ 0)^T$.

(a) Uppfyller $\bar{x}$ andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor? .... (2p)

(b) Är $\bar{x}$ en lokal minpunkt till (NLP)? Systematisk metod behöver inte användas för att avgöra detta. .... (1p)

(c) Är dina svar från (2a) och (2b) konsistenta? .... (2p)

Observera: Ej motiverade svar på denna uppgift ger inga poäng.

3. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdatering, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. .... (5p)

4. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 1. \end{array}$$

(a) För en given positiv barriärparameter μ, bestäm motsvarande optimallösning till barriärtransformerade problemet, $x(\mu)$, och tillhörande multiplikatorestimat $\lambda(\mu)$. Det går att ta fram analytiska uttryck för detta lilla problem. ..... (2p)

(b) Antag att vi vill lösa (QP) med en primal-dual inrepunktsmetod, där vi initialt väljer $\mu = 1$, $x = (1\ 1)^T$ och $\lambda = 2$. Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt. Det linjära ekvationssystem som uppstår får du lösa på valfritt sätt. Jämför ditt svar med $x(1)$ och $\lambda(1)$ från uppgift (4a). .... (3p)

5. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 0)^T$.

(a) Utför en iteration i en active-set metod för att lösa (QP). Starta i $\bar{x}$ med de fyra första bivillkoren i den aktiva mängden. Antag att man i föregående iteration kommit fram till att $\bar{x}$ minimerar det problem som uppstår då de fyra första bivillkoren hålls aktiva. .... (2p)

(b) Man skulle kunna tänka sig att använda en variant av active-set metod där man släpper *alla* olikhetsbivillkor som har negativ multiplikator. Starta återigen i $\bar{x}$ med samma förutsättningar som i uppgift (5a). Beräkna sökriktningen med denna variant av active-set metod. Bestäm därur på lämpligt sätt nästa iterationspunkt. .... (2p)

(c) Kommentera eventuella brister hos metoden föreslagen i (5b) baserat på svaret i den uppgiften. .... (1p)

Lycka till!