KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Torsdagen den 16 december 2004 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ och $g : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Gäller det då garanterat att $\nabla f(x^*) = 0$? .... (1p)

(b) Antag att $\widetilde{x}$ är en tillåten punkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0, \end{array}$$

där $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ och $g : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Om $\nabla f(\widetilde{x}) = 0$, är då $\widetilde{x}$ garanterat en lokal minpunkt till (NLP)? ....(1p)

(c) Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet (SDP) givet av

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(CX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X = X^T \succeq 0. \end{array}$$

där $C = C^T \in I\!\!R^{n \times n}$ och $A_i = A_i^T \in I\!\!R^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$. Antag att X^* och $\tilde{X}$ är optimallösningar till (SDP). Är då garanterar $\frac{1}{2}X^* + \frac{1}{2}\tilde{X}$ också en optimallösning till (SDP)? ....(1p)

(d) Betrakta det endimensionella kvadratiska programmeringsproblemet

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^2 \\ \text{då} & x \geq 1. \end{array}$$

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till det tillhörande barriärtransformerade problemet för en positiv barriärparameter μ. Gäller för detta problem att $\lim_{\mu \to 0^+} x(\mu) = 1$? .... (1p)

(e) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Måste det då gälla att $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$? .... (1p)

2. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdatering, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. .... (5p)

3. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Låt $\widetilde{x} = (3\ 5)^T$.

(a) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ utan bivillkor i den aktiva bivillkorsmängden. Du behöver inte utföra några beräkningar utan kan utnyttja att problemet är litet och illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. .... (2p)

(b) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ med bivillkor 2 i den aktiva bivillkorsmängden. Du behöver inte utföra några beräkningar utan kan utnyttja att problemet är litet och illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. .... (2p)

(c) Verifera (algebraiskt) att den punkt du funnit är globalt optimal till (QP). (1p)

4. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2 \\ \text{då} & 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (1\ 0)^T$ och $\lambda^{(0)} = 2$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av en primal-dual inrepunktsmetod. Låt $\mu = 1$ och genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som uppstår dels på allmän form och dels med explicita numeriska värden. Det behöver inte lösas för full poäng på uppgiften, men du måste ange hur dess lösning skulle användas för att generera nästa iterationspunkt. .... (5p)

5. Låt $\widetilde{f} : I\!R^2 \to I\!R$ vara en två gånger kontinuerligt differentierbar funktion sådan att $\nabla^2 \widetilde{f}(x_1, x_2) \succ 0$ för alla $x \in I\!R^2$ och $\nabla \widetilde{f}(1,1) = (0\ 0)^T$. Låt $x^* = (1\ 1\ 1\ 1)^T$.

(a) Bestäm ett linjärt likhetsbivillkor på formen $a^T x = b$, där $a \in I\!R^4$ och $b \in I\!R$, så att x^* blir en lokal minpunkt till problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \widetilde{f}(x_1,x_2) + \frac{1}{2}x_3^2 - x_4^2 - x_3 + 2x_4 \\ \text{då} & 2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 \geq 0, \\ & a^T x = b. \end{array}$$

.... (2p)

(b) Avgör om det går att välja något värde på $c \in I\!R$ så att x^* blir lokal minpunkt till problemet

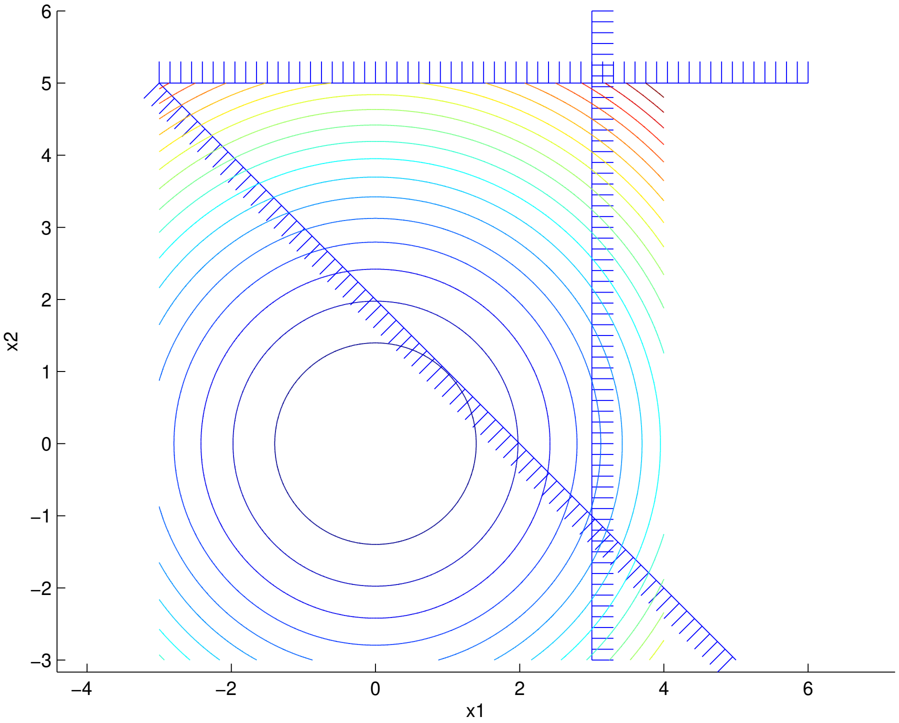
$$\begin{array}{ll} \min & \widetilde{f}(x_1,x_2) + \frac{1}{2}x_3^2 - x_4^2 - x_3 + 2x_4 \\ \text{då} & c - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 \geq 0. \end{array}$$

.... (3p)

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .

Figur till uppgift 3a:



Figur till uppgift 3b: