KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 9 juni 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min \ f(x)$$

där f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $I\!R^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $I\!R^n$ sådan att $\nabla^2 f(\widehat{x})$ har minst ett negativt egenvärde, kan $\widehat{x}$ då vara en lokal minpunkt till (P)? ....(1p)

(b) Betrakta de primala och duala semidefinita programmeringsproblemen

$$(PSDP) \quad \begin{array}{ll} \min & \mathrm{trace}(CX) \\ \text{då} & \mathrm{trace}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X = X^T \succeq 0, \end{array}$$

respektive

$$(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ & S = S^T \succeq 0. \end{array}$$

Är dualitetsgapet garanterat noll för dessa semidefinita programmeringsproblem? ....(1p)

(c) Låt H vara en symmetrisk positivt semidefinit $n \times n$-matris och låt Z vara en $n \times m$-matris, där $m \geq 1$. Gäller då garanterat att $Z^T H Z$ är positivt semidefinit? ....(1p)

(d) Låt $H \in I\!R^{n \times n}$ och $c \in I\!R^n$. Gäller då att konjugerade gradientmetoden löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2} x^T H x + c^T x$$

i högst n iterationer om H är symmetrisk och positivt definit? .... (1p)

(e) Låt mängden C definieras av

$$C = \left\{ Z \in \mathbb{R}^{m\times m} : Z = Z^T \succeq 0, \mathrm{trace}(A_j Z) = c_j, j = 1, \dots, n \right\},$$

där A_j, $j = 1, \dots, n$, är givna symmetriska $m \times m$-matriser och c är en given vektor i $\mathbb{R}^n$. Är C garanterat en konvex mängd? .... (1p)

2. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -27 \\ -23 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Låt $\widetilde{x} = (0\ 1)^T$.

(a) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ med bivillkor 1 i den aktiva bivillkorsmängden. Du behöver inte utföra några beräkningar utan kan utnyttja att problemet är litet och illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. .... (4p)

(b) Verifera (algebraiskt) att den punkt du funnit är globalt optimal till (QP). (1p)

3. Betrakta problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där $x \in \mathbb{R}^n$ och $g(x) \in \mathbb{R}^m$. Första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för (P) i en reguljär punkt är (som bekant) följande:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \nabla g(x)\lambda &= 0, \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Antag att Newtons metod används för att lösa detta ickelinjära ekvationssystem i $x \in \mathbb{R}^n$ och $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Härled det linjära ekvationssystem som behöver lösas, givet den aktuella iterationspunkten (x_k, λ_k), vid en Newtoniteration. Visa att detta linjära ekvationssystem under lämpliga förutsättningar är ekvivalent med ett visst QP-problem. Ange förutsättningarna och ställ upp QP-problemet. .... (5p)

4. Låt $x^* = (0\ 0\ 0\ 0)^T$. Antag att $f : I\!R^4 \to I\!R$ är en två gånger kontinuerligt differentierbar funktion sådan att

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Betrakta problemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x_j \geq l_j, \quad j = 1, \ldots, 4, \\ & x_j \leq u_j, \quad j = 1, \ldots, 4, \end{array}$$

där $l_j \in I\!R \cup \{-\infty\}$, $j = 1, \ldots, 4$, och $u_j \in I\!R \cup \{\infty\}$, $j = 1, \ldots, 4$, är givna parametrar. Ändliga värden på l_j respektive u_j svarar mot gränser på x_j, medan $l_j = -\infty$ respektive $u_j = \infty$ inte ger någon begränsning. Vi tänker oss nedan $l_j = -\infty$ respektive $u_j = \infty$ utom där ändliga värden väljs.

(a) Bestäm ändliga värden på sammanlagt två av l_j, $j = 1, \ldots, 4$, och u_j, $j = 1, \ldots, 4$, så att x^* uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till det resulterande optimeringsproblemet (NLP). .... (2p)

(b) Bestäm ändliga värden på sammanlagt tre av l_j, $j = 1, \ldots, 4$, och u_j, $j = 1, \ldots, 4$, så att x^* uppfyller andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till det resulterande optimeringsproblemet (NLP). .... (2p)

(c) Är x^* garanterat en lokal minpunkt till det problem du bestämt i (4b)? . (1p)

5. Betrakta problemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & x_j(1 - x_j) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där $H \in I\!R^{n \times n}$ är symmetrisk och positivt definit samt $c \in I\!R^n$.

(a) Problemet (NLP) har kvadratiska bivillkor. Visa att de kan skrivas om som linjära bivillkor, så att vi får ett konvext kvadratiskt programmeringsproblem (QP). .... (1p)

(b) Låt, för en positiv barriärparameter μ, $x_{NLP}(\mu)$ och $x_{QP}(\mu)$ vara minpunkter till de respektive barriärtransformerade problem som uppstår då en logaritmisk barriärtransformation används på (NLP) respektive (QP). Hur förhåller sig $x_{NLP}(\mu)$ och $x_{QP}(\mu)$ till varandra? .... (4p)

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .

Figur till uppgift 2a: