KTH Matematik

5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering

Föreläsning 7

Kvadratisk programmering med olikhetsbivillkor
Active-set metoder

Kvadratisk programmering med olikhetsbivillkor

Betrakta kvadratiskt programmeringsproblem

$$
(IQP) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \in I\!R^n. \end{array}
$$

Vi antar att $H \succ 0$. Problemet är då konvext.

Tidigare har vi tittat på fallet med likhetsbivillkor.

Nu måste vi bestämma vilka bivillkor som är aktiva i optimum.

Vi kommer att studera två typer av metoder:

- Active-set metoder. (“Hårt” val.)
- Inrepunktsmetoder. (“Mjukt” val.)

Bakgrund till active-set metod

En active-set metod genererar *tillåtna punkter*.

Antag att vi känner en tillåten punkt $\bar{x}$. (Kan fås med LP.)

Gissa att de villkor som är aktiva i $\bar{x}$ också är aktiva i x^*.

Låt $\mathcal{A} = \{l : a_l^T \bar{x} = b_l\}$. Aktiva bivillkoren i $\bar{x}$.

Låt $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$ vara sådan att $A_{\mathcal{W}}$ har full radrang.

Håll (temporärt) bivillkoren i $\mathcal{W}$ aktiva, dvs lös

$$
(EQP_{\mathcal{W}}) \quad
\begin{array}{ll}
\text{min} & \frac{1}{2}(\bar{x}+p)^T H(\bar{x}+p) + c^T(\bar{x}+p) \\
\text{då} & A_{\mathcal{W}} p = 0, \\
 & p \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Lösning av likhetssubprolement

Problemet

$$
(EQP_{\mathcal{W}}) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(\bar{x}+p)^T H(\bar{x}+p) + c^T(\bar{x}+p) \\ \text{då} & A_{\mathcal{W}} p = 0, \\ & p \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

har, enligt förra föreläsningen, optimallösning p^* och tillhörande multiplikatorvektor $\lambda_{\mathcal{W}}^*$ som ges av

$$
\begin{pmatrix} H & A_{\mathcal{W}}^T \\ A_{\mathcal{W}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ -\lambda_{\mathcal{W}}^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H\bar{x} + c \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Optimalt x^* som motsvarar $(EQP_{\mathcal{W}})$ ges av $x^* = \bar{x} + p^*$.

Vad har vi bortsett från?

Då vi har löst $(EQP_{\mathcal{W}})$ istället för (IQP) har vi bortsett från två saker:

1. Vi har bortsett från alla inaktiva bivillkor, dvs vi måste kräva $a_i^T x \geq b_i$ för $i \notin \mathcal{W}$.

2. Vi har bortsett från att de aktiva bivillkoren är olikheter, dvs vi har ansatt $A_{\mathcal{W}} x = b_{\mathcal{W}}$ istället för $A_{\mathcal{W}} x \geq b_{\mathcal{W}}$.

Hur inkluderar vi dessa krav?

Inkludera de inaktiva bivillkoren

Vi har utgående från $\bar{x}$ räknat ut sökriktningen p^*.

Om $A(\bar{x}+p^*) \geq b$ uppfyller $\bar{x}+p^*$ alla bivillkor.

Annars kan vi räkna ut maximala steglängden α_{max} så att $A(\bar{x}+\alpha_{\text{max}} p^*) \geq b$ gäller.

Villkoret blir $\alpha_{\text{max}} = \displaystyle\min_{i:a_i^T p^* < 0} \frac{a_i^T \bar{x} - b_i}{-a_i^T p^*}$.

Två fall:

- $\alpha_{\text{max}} \geq 1$. Vi kan låta $\tilde{x} \leftarrow \bar{x} + p^*$.
- $\alpha_{\text{max}} < 1$. Vi kan låta $\tilde{x} \leftarrow \bar{x} + \alpha_{\text{max}} p^*$ och $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \bigcup \{l\}$, där $a_l^T(\bar{x}+\alpha_{\text{max}} p^*) = b_l$.

Punkten $\bar{x}+p^*$ är intressant då $\alpha_{\text{max}} \geq 1$.

Inkludera olikhetskravet

Här förutsätter vi att $\alpha_{\max} \geq 1$, dvs $A\widetilde{x} \geq b$, där $\widetilde{x} = \bar{x} + p^*$.

Då vi löst $(EQP_{\mathcal{W}})$ har vi fått p^* och $\lambda^*_{\mathcal{W}}$. Två fall:

- $\lambda^*_{\mathcal{W}} \geq 0$. I så fall är $\widetilde{x}$ optimallösning till

$$(IQP_{\mathcal{W}}) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & A_{\mathcal{W}} x \geq b_{\mathcal{W}}, \quad x \in I\!R^n, \end{array}$$

  och därmed också optimallösning till (IQP).

- $\lambda^*_k < 0$ för något k. Om $A_{\mathcal{W}} p = e_k$ gäller att $(H\widetilde{x} + c)^T p = {\lambda^*_{\mathcal{W}}}^T A_{\mathcal{W}} p = \lambda^*_k < 0$. Låt därför $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \backslash \{k\}$.

En iteration i en active-set metod för att lösa (IQP)

Givet tillåten $\bar{x}$ och $\mathcal{W}$ sådan att $A_{\mathcal{W}}$ har full radrang och $A_{\mathcal{W}}\bar{x} = b_{\mathcal{W}}$.

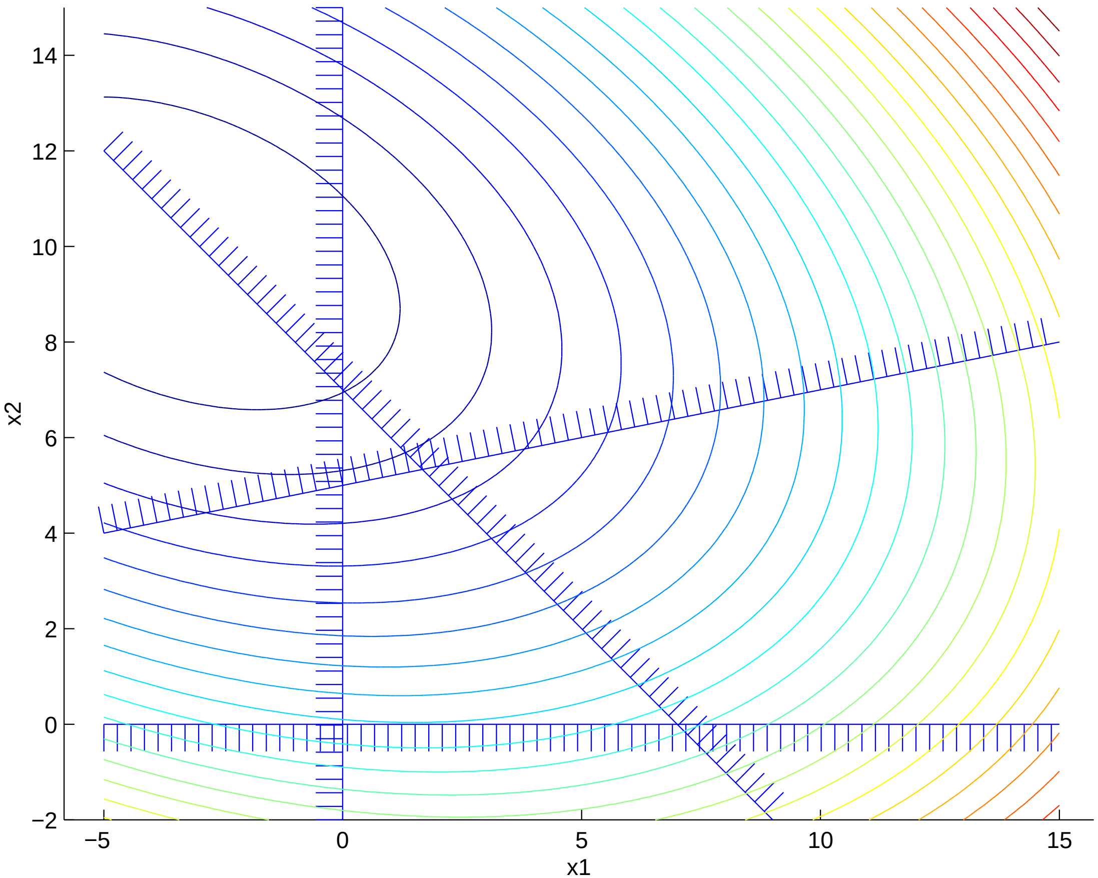
- Lös $\begin{pmatrix} H & A_{\mathcal{W}}^T \\ A_{\mathcal{W}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ -\lambda_{\mathcal{W}}^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H\bar{x} + c \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $l \leftarrow$ index för bivillkor som först blir otillåtet längs p^*.
- $\alpha_{\max} \leftarrow$ maximala steglängden längs p^*.
- Om $\alpha_{\max} < 1$, låt $\bar{x} \leftarrow \bar{x} + \alpha_{\max} p^*$ och $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \bigcup \{l\}$. Ny iteration.
- Annars, $\alpha_{\max} \geq 1$. Låt $\bar{x} \leftarrow \bar{x} + p^*$.
- Om $\lambda_{\mathcal{W}}^* \geq 0$ är $\bar{x}$ optimal. Klar!
- Annars, $\lambda_k^* < 0$ för något k. Låt $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \backslash \{k\}$. Ny iteration.

Exempelproblem

Betrakta följande tvådimensionella exempelproblem.

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 36x_2 \\
\text{då} & x_1 \ge 0, \\
 & x_2 \ge 0, \\
 & -x_1 - x_2 \ge -7, \\
 & x_1 - 5x_2 \ge -25.
\end{array}
$$

Geometrisk illustration av exempelproblemet



Optimallösning till exempelproblemet

Antag att vi vill lösa exempelproblemet med active-set metod.

Startpunkt $x = (5\ 0)^T$.

Vi kan initialt välja $\mathcal{W} = \{2\}$ eller $\mathcal{W} = \{0\}$.

Optimallösning $x^* = \begin{pmatrix} \frac{15}{32} & 5\frac{3}{32} \end{pmatrix}^T$ med $\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\frac{1}{32} \end{pmatrix}^T$.

Kommentarer till active-set metod för kvadratisk programmering

Active-set metod för kvadratisk programmering:

- "Billiga" iterationer. Endast ett bivillkor läggs till eller dras ifrån $\mathcal{W}$.
- $A_{\mathcal{W}}$ bibehåller full radrang.
- Rättfram modifikation till fallet $H \succeq 0$. (För $H = 0$ får vi simplexmetoden om startpunkten är en extrempunkt.)
- Kan kräva exponentiellt antal iterationer.
- Kan cykla (i teorin). Anticyklingsstrategi som i simplexmetoden.
- Kan "varmstartas" effektivt om startpunkten har "nästan rätt" aktiva bivillkor.

Att hitta en tillåten punkt

Antag att $\bar{x}$ inte är tillåten. Vi kan då exempelvis lösa

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & t \\ \text{då} & Ap + et \geq -(A\bar{x} - b), \\ & t \geq 0, \\ & p \in I\!R^n, \; t \in I\!R. \end{array}
$$

Active-set metod för linjärprogrammering

Antag att $H = 0$, dvs problemet är

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \quad x \in I\!R^n. \end{array}$$

Vi kan lösa $\begin{pmatrix} \bar{H} & A_{\mathcal{W}}^T \\ A_{\mathcal{W}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ -\bar{\lambda}_{\mathcal{W}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, där $\bar{H}$ uppfyller $Z_{\mathcal{W}}^T \bar{H} Z_{\mathcal{W}} \succ 0$, för matris $Z_{\mathcal{W}}$ vars kolumner bildar bas i null($A_{\mathcal{W}}$).

Önskad steglängd längs $\bar{p}$ är oändlig, dvs α_{max} ger steglängden.

Simplexmetoden baseras på kvadratisk $A_{\mathcal{W}}$. I varje iteration släpps ett bivillkor, l, och läggs till ett bivillkor, k.