KTH Matematik

Tentamen i 5B1752 Optimeringslära för E.
Onsdag 10 januari 2007 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag använder råvarorna $R_1, \dots, R_m$ för att blanda till produkterna $P_1, \dots, P_n$. För varje kg av produkt P_j åtgår a_{ij} kg av råvara R_i. Företaget kan köpa in R_i till priset b_i kr/kg och sälja P_j till priset c_j kr/kg. Marknads- och lagerbegränsningar gör att man inte vill blanda till mer än högst d_j kg per vecka av P_j och inte köpa in mer än högst e_i kg per vecka av R_i. Ovan är a_{ij}, b_i, c_j, d_j och e_i givna konstanter för $i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, n$.

Frågan är nu hur många kg av respektive produkt som skall blandas till per vecka för att företagets "vinst", här definierad som försäljningsintäkter minus inköpskostnader, skall maximeras. *Formulera* detta som ett LP-problem! (5p)

(b) Betrakta LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 7 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Av det speciella utseendet på matrisen $\mathbf{A}$ följer att problemet P i själva verket är ett minkostnadsflödesproblem. Rita motsvarande nätverk och verifiera därefter att $\hat{\mathbf{x}} = (2, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0)^{\mathsf{T}}$ är en optimal lösning till P. . . . . (5p)

2. Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 + x_3 \geq 4, \\ & x_2 + x_3 \geq 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(a) Transformera problemet till standardform och lös det med simplexmetoden. Du måste starta med att låta x_1, x_2 och x_3 vara basvariabler (vilket visar sig ge en tillåten men inte optimal baslösning). .... (8p)

(b) Formulera det motsvarande duala LP-problemet och ange en optimal lösning till detta. Kontrollera speciellt att optimalvärdena är lika. .... (2p)

Frivillig räknehjälp till (a)-uppgiften: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

3. Låt δ_1, δ_2, δ_3 och δ_4 vara fyra stycken givna tal (som typiskt är ganska "små") och betrakta följande ickelinjära minsta-kvadratproblemet i variabelvektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{minimera} \quad f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(h_1(\mathbf{x})^2 + h_2(\mathbf{x})^2 + h_3(\mathbf{x})^2 + h_4(\mathbf{x})^2),$$

där funktionerna h_i ges av

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_2 - \delta_1\,, \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2 - \delta_2\,, \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_2^2 - x_1 - \delta_3\,, \\ h_4(\mathbf{x}) &= x_2^2 + x_1 - \delta_4\,. \end{aligned}$$

(a) Antag först att $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$ och $\delta_4 = 0$.
Visa att då är $\hat{\mathbf{x}} = (0,0)^\mathsf{T}$ en global minpunkt till $f(\mathbf{x})$.
(Detta motiverar att vi använder denna punkt till startpunkt nedan.) ... (2p)

(b) Antag nu att $\delta_1 = -0.1$, $\delta_2 = 0.1$, $\delta_3 = -0.2$ och $\delta_4 = 0.2$.
Genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$. Kontrollera speciellt att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. .... (5p)

(c) Antag slutligen att $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.1$, $\delta_3 = 0.2$ och $\delta_4 = 0.2$.
Visa först att om man då genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$ så blir $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)}$.
Avgör sedan om denna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ är en lokal minpunkt till $f(\mathbf{x})$. .... (3p)

4. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 3, \\ & x_1 + x_3 \geq 6, \\ & x_2 + x_3 \geq 7. \end{aligned}$$

(a) Använd den iterativa metod som ingår i kursen för att bestämma en optimal lösning. Du måste utgå från punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ (som är tillåten men inte optimal). ....(8p)

(b) Verifiera att din erhållna optimallösning $\hat{\mathbf{x}}$ tillsammans med en viss vektor $\hat{\mathbf{y}}$ (som du förstås ska ange) uppfyller optimalitetsvillkoren för problemet. ....(2p)

Observera:
Den frivilliga räknehjälpen från uppgift 2 kan vara användbar även i uppgift 4(a).

5. I denna uppgift betraktar vi mängden $S = \{\mathbf{x} \in I\!R^3;\ |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$, som begränsas av 8 st linjära olikhetvillkor : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$, etc. Låt $\mathbf{q}$ vara en given punkt i $I\!R^3$ som inte ligger i S, dvs $\mathbf{q} \notin S$, och betrakta problemet

$$\text{minimera } |\mathbf{x}-\mathbf{q}|^2 \ \text{ då } \mathbf{x} \in S,$$

där $|\cdot|$ betyder vanlig euklidisk norm i $I\!R^3$, dvs $|\mathbf{x}-\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{q})^\mathsf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{q})$.

Vi söker alltså den punkt $\mathbf{x}$ i mängden S som ligger närmast den givna punkten $\mathbf{q}$.

(a) Antag först att $\mathbf{q} = (-0.5,\ 0.4, -0.4)^\mathsf{T}$.
Visa, med hjälp av relevanta optimalitetsvillkor, att då är $\mathbf{x} = (-0.4,\ 0.3, -0.3)^\mathsf{T}$ en optimal lösning till problemet. ....(3p)

(b) Antag nu i stället att $\mathbf{q} = (-0.8,\ 0.6, -0.1)^\mathsf{T}$.
Visa, med hjälp av relevanta optimalitetsvillkor, att då är $\mathbf{x} = (-0.6,\ 0.4,\ 0)^\mathsf{T}$ en optimal lösning till problemet. ....(3p)

(c) Antag slutligen att $\mathbf{q} = (-0.7,\ 1.9, -0.5)^\mathsf{T}$.
Visa, med hjälp av relevanta optimalitetsvillkor, att då är $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ 0)^\mathsf{T}$ en optimal lösning till problemet. ....(4p)

Lycka till!