KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Lördagen den 15 januari 2005 kl. 8.00–13.00.
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) Låt λ beteckna yielden för betalningarna. Vi får enligt boken att $P = A/\lambda$. Eftersom modifierad duration ges av

$$D_M = -\frac{dP}{d\lambda} \cdot \frac{1}{P}$$

får vi

$$D_M = \frac{A}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{P} = \frac{AP^2}{A^2} \cdot \frac{1}{P} = \frac{P}{A}.$$

MacCauley durationen

$$D = D_M(1+\lambda) = \frac{P}{A} \cdot \frac{P+A}{P} = \frac{P+A}{A}.$$

(b) Vi antar att obligationen handlas till yielden λ. Vi får då

$$P = \sum_{i=1}^{5} \frac{5}{(1+\lambda)^i} + \frac{100}{(1+\lambda)^5}$$

och MacCauley durationen

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{5} \frac{5i}{(1+\lambda)^i} + \frac{500}{(1+\lambda)^5}}{P}.$$

2. (a) Sant.

(b) Sant.

(c) Sant.

(d) Sant.

(e) Falskt.

3. (a) Betrakta portföljen $\mathbf{w}^p = (1-\alpha)\mathbf{w}^0 + \alpha \mathbf{w}^1$. Den har variansen $\sigma_p^2 = (1-\alpha)^2\sigma_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{01} + \alpha^2\sigma_1^2$. Eftersom $\mathbf{w}^0$ är minimal gäller $0 = \frac{d}{d\alpha}\sigma_p^2\Big|_{\alpha=0} = -2\sigma_0^2 + 2\sigma_{01}^2$, varur det önskade resultatet följer.

(b) $\mathbf{w}^2 = (1-\alpha)\mathbf{w}^0 + \alpha\mathbf{w}^1$ är effektiv enligt två-fondssatsen. $\sigma_{12} = (1-\alpha)\sigma_{01} + \alpha\sigma_1^2 = (1-\alpha)\sigma_0^2 + \alpha\sigma_1^2 = 0$ ger $\alpha = \sigma_0^2/(\sigma_0^2 - \sigma_1^2) < 0$.

(c) Detta är helt analogt med det centrala satsen i CAPM. Vi gör ett liknande bevis som finns i boken. Låt $r^i(\alpha) = \alpha r_i + (1-\alpha) r_M$ och $r^z(\alpha) = \alpha r_z + (1-\alpha) r_M$. Vi får då att $\bar{r}^i(\alpha) = \alpha \bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_M$ och $\bar{r}^z(\alpha) = \alpha \bar{r}_z + (1-\alpha)\bar{r}_M$ och

$$\sigma^i(\alpha) = \left[\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM} + (1-\alpha)^2\sigma_M^2\right]^{1/2}$$

och på samma sätt

$$\sigma^z(\alpha) = \left[\alpha^2\sigma_z^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2\right]^{1/2}.$$

Vi kan då beräkna (se CAPM-beviset boken)

$$\left.\frac{dr^i}{d\sigma^i}\right|_{\alpha=0} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

och på samma sätt

$$\left.\frac{dr^z}{d\sigma^z}\right|_{\alpha=0} = -\frac{(\bar{r}_z - \bar{r}_M)}{\sigma_M}$$

Dessa båda storheter, som talar om vilken lutning som den effektiva kurvan har i marknadsportföljen, måste vara lika, eftersom marknadsportföljen är effektiv. Detta ger den önskade likheten.

4. (a) De förväntade avkastningarna måste enligt APT följa $\bar{r}_i = \lambda_0 + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 11.2 &= \lambda_0 + 1\lambda_1 - 0.2\lambda_2 \\ 12.7 &= \lambda_0 + 2\lambda_1 + 0.3\lambda_2 \\ 11.0 &= \lambda_0 + 0.5\lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

som har lösningen $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (9, 2, -1)$.
Avkastningarna måste alltså ligga i planet: $\bar{r}_i = 9 + 2b_{i1} - b_{i2}$.

(b) Vi observerar att $9 + 2b_{D1} - b_{D2} = 9 + 4 - 1 = 12 \neq \bar{r}_D = 11$, så det måste alltså finnas arbitragemöjligheter. Vi skall finna en sådan genom att hitta två riskfria investeringar som ger olika avkastning. Vi börjar med att kombinera A,B, och C. Vi får då ekvationssystemet:

$$\begin{aligned} x_A + 2x_B + 0.5x_C &= 0 \text{ (ingen risk med faktor 1)} \\ -0.2x_A + 0.3x_B - x_C &= 0 \text{ (ingen risk med faktor 2)} \\ x_A + x_B + x_C &= 1 \text{ (andelar summerar till 1)} \end{aligned}$$

Vilket ger $x_A = 43/11$, $x_B = -18/11$ $x_C = -14/11$ och avkastningen 9 (svaret på c-uppgiften).
Vi tar sedan och kombinerar A, C och D. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_A + 0.5x_C + 2x_D &= 0 \\ -0.2x_A - x_C + x_D &= 0 \\ x_A + x_C + x_D &= 1. \end{aligned}$$

Vilket ger $x_A = 25/2$, $x_C = -7$ och $x_D = -9/2$ och avkastningen $27/2 = 13.5$. Vi har alltså olika riskfria avkastningar. Om vi kortar den som ger 9 procents avkastning och går lång den som ger 13.5 så har vi en arbitragemöjlighet.

(c) Den riskfria avkastningen är enligt ovan 9.

5. Se utdelat material.