KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Torsdagen den 19 oktober 2006 kl. 14.00–19.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) $P = \sum_{i=1}^n x_i e^{-s(t_i)t_i}$.

(b) $D_{FW} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^n t_i x_i e^{-s(t_i)t_i}$.

(c) Antag $P(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i e^{-(s(t_i)+\lambda)t_i}$. Då gäller

$$\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW}$$

.

(d) Antag nu att $P(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i e^{-s(t_i)(1+\lambda)t_i}$. Då gäller

$$\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = -\frac{1}{P}\sum_{i=1}^n s(t_i)t_i x_i e^{-s(t_i)t_i}.$$

2. (a) Se boken.

(b) En enkel linjärprogrammeringsmodell ges av

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Minimera} & \multicolumn{3}{l}{106.80x_1 + 102.9x_2 + 103.9x_3 + y_0} \\
\text{då} & 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 + y_0 & = & 10 + y_1 \\
 & 109x_1 + 5x_2 + 7x_3 + y_1 & = & 20 + y_2 \\
 & 105x_2 + 7x_3 + y_2 & = & 50 + y_3 \\
 & 7x_3 + y_3 & = & 50 + y_4 \\
 & 7x_3 + y_4 & = & 50 + y_5 \\
 & 107x_3 + y_5 & = & 50 \\
 & x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

3. (a) Låt α vara andelen av förmögenheten som investeras i aktie 1 och β vara andelen som investeras i aktie 2. Således är den andel som inte investeras $1-\alpha-\beta$. Vi står alltså inför lotteriet

$$X = \begin{cases} 1-\alpha-\beta+2\alpha+2\beta & \text{med sannolikheten } 1/4 \\ 1-\alpha-\beta+2\alpha+1/2\beta & \text{med sannolikheten } 1/4 \\ 1-\alpha-\beta+1/2\alpha+2\beta & \text{med sannolikheten } 1/4 \\ 1-\alpha-\beta+1/2\alpha+1/2\beta & \text{med sannolikheten } 1/4. \end{cases}$$

Vi skall välja α och β så att väntevärdet av $\ln(X)$ maximeras, eftersom vi vill maximera förväntad tillväxt.

Vi deriverar målfunktionen, $1/4\ln(1+\alpha+\beta)+1/4\ln(1+\alpha-1/2\beta)+1/4\ln(1-1/2\alpha+\beta)+1/4\ln(1-1/2\alpha-1/2\beta)$, med avseende på α och får:

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}+\frac{1}{1+\alpha-1/2\beta}-\frac{1/2}{1-1/2\alpha+\beta}-\frac{1/2}{1-1/2\alpha-1/2\beta} \quad = \quad 0.$$

Notera att pga symmetrin så måste antingen $\alpha=\beta$ eller också så gäller antingen $\beta=0$ eller $\alpha=\beta=0$. Vi utreder det symmetriska fallet först. Vi får då från ovan

$$\frac{1}{1+2\alpha}+\frac{1}{2+\alpha} \quad = \quad \frac{1}{2-2\alpha}$$

Vilket ger $(2-2\alpha)(3+3\alpha)=(1+2\alpha)(2+\alpha)$. Vilket ger $8\alpha^2+5\alpha-4=0$ eller

$$\alpha=\beta=\frac{\sqrt{153}-5}{16}\approx 0.4606.$$

Vi observerar att detta ger en förväntad nytta på $1/4(\ln(1+0.4606+0.4606)+\ln(1+0.4606/2)+\ln(1+0.4606/2)+\ln(1-0.4606))\approx 0.1125$.
Alternativet $\beta=0$ ger optimalitetsvillkoret

$$\frac{1/2}{1+\alpha}-\frac{1/4}{1-1/2\alpha}=0$$

vilket ger $\alpha=1/2$ och nyttan $1/2\ln(1+1/2)+1/2\ln(1-1/2\cdot 1/2)\approx 0.0589$.
Alternativen $\alpha=1,\ \beta=0$ och $\alpha=0,\ \beta=0$ ger förväntad nytta lika med 0.

Alltså skall man investera 46.06 % i den ena aktien och lika mycket i den andra.

(b) Den nyttofunktion som var angiven i talet gav lite för krånliga räkningar. Därför ändrades uppgiften så att $u(w)=\log(w)$. Den säkra ekvivalenten, C, löser $u(X_0+C)=\log(X_0+C)=E\log(X_0X)$, där X är avkastningen på den optimal strategin från a) uppgiften. Vi får $\log(X_0+C)=\log(X_0)+0.1125$ vilket ger $C=(e^{0.1125}-1)X_0=11912$ kr.

4. (a) För att få punkter på den effektiva fronten skall man lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}w^TCw \\ \text{då} & e^Tw=1 \\ & \bar{r}^Tw=r^* \end{array} \tag{1}$$

De så kallade KKT villkoren är då

$$\begin{array}{rcl} Cw & = & \lambda e+\mu\bar{r}^T \\ e^Tw & = & 1 \\ \bar{r}^Tw & = & r^* \end{array} \tag{2}$$

Sätt $\mu=0$ och strunta i det andra bivillkoret i (1). Detta svarar mot att vi löser utan avkastningskrav. Vi får då $Cw=\lambda e$, vilket ger $w(\lambda)=\lambda C^{-1}e$, vilket ger

$$w(\lambda)=\lambda\begin{pmatrix} 7/12 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1/4\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Välj nu $\lambda=4/5$. Då gäller att $e^Tw=e^Tw(6/5)=1$ och vi har den optimala lösningen till min-varians problemet. Alltså $w^1=(1/5,\,0,\,4/5)$.

(b) Vi vill nu hitta en annan portfölj på den effektiva fronten. Vi kan göra det genom att (temporärt) sätta $\mu = 1$ och $\lambda = 0$ och sedan skala lösningen och välja r^* så att KKT villkoren uppfylls. Alltså $Cw = \bar{r}$ ger

$$w = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Vilket efter skalning ger $w^2 = (5/21,\ 8/21,\ 8/21)$, vilket alltså löser (1) med $r^* = (6,\ 5,\ 2)^T(5/21,\ 8/21,\ 8/12) = 86/21$. Enligt två fondssatsen kan vi nå alla punkter på den effektiva fronten genom att bilda kombinationer $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$.

(c) I enlighet med bokens analys kommer vi åt "tangentportföljen" genom att lösa $Cw = \bar{r} - r_f$ och sedan skala lösningen. Detta ger $w = (7/27,\ 16/27,\ 4/27)$, och vi kan enligt enfondssatsen komma åt alla punkter på den effektiva fronen genom att bilda kombinationer $(7\alpha/27,\ 16\alpha/27,\ 4\alpha/27, 0) + (1-\alpha)(0,\ 0,\ 0,\ 1) = (7\alpha/27,\ 16\alpha/27,\ 4\alpha/27, 1-\alpha)$, där den fjärde komponenten betecknar investeringen i den riskfria räntan.

5. (a) Se utdelat material.

(b) Den samlade positionen $Z = X + Y$ är normalfördelad med medelvärde $m_Z = 5 + 7 = 12$ Mkr och varians $V(Z) = \sigma_Z^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 0.1 \cdot 10 \cdot 12 = 220$. 5%-Value-at-Risk ges av det tal q som löser $P(Z \geq -q) = 1 - 0.05 = 0.95$. Sannolikheten

$$\begin{aligned} P(Z \geq -q) &= P(\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z} \geq \frac{-q - m_Z}{\sigma_Z}) = \\ \{\text{P.g.a. symmetri}\} &= P(W \leq \frac{q + m_Z}{\sigma_Z}) \\ &= P(W \leq \frac{q + m_Z}{\sigma_Z}) \end{aligned}$$

där $W \in N(0,1)$. En glutt i tabellen ger vid handen att $\frac{q+m_Z}{\sigma_Z} \approx 1.645$ vilket ger $q = -12 + 1.645 \cdot \sqrt{220} = 12.4$ Mkr.