KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Tisdag 25 augusti 2009 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

---

1. (a) Betrakta följande distributionsplaneringsproblem.

Noderna 1 och 2 är källnoder med nettoutflödena 10 respektive 20 fyllda lastbilar per timme. Noderna 4 och 5 är sänknoder med nettoinflödena 15 fyllda lastbilar per timme vardera. Trafiken kan gå från nod 1 till 4 och från nod 2 till 5. Den kan även gå från såväl nod 1 eller 2 till mellannoden 3 och sedan vidare såväl till nod 4 eller 5. Trafikintensiteten är så pass låg att vi bortser från alla trängseleffekter. Vi betraktar även lastbilsleveranserna som utbytbara, d.v.s. det spelar inte någon roll vilken av lastbilarna som startar i källnoderna och vilken sänknod de ankommer till.

Till varje båge i grafen associeras en kostnad. Ge ett förslag på ett rimligt val av kostnader för ett verkligt trafikproblem. (Alltså vad dessa kostnader konceptuellt motsvarar)

Rita upp nätverket. Bestäm på godtyckligt sätt en tillåten baslösning som svarar mot ett spännande träd i nätverksgrafen.

Antag att kostnaderna är 2 enheter/bil för varje båge i nätverket. Bestäm den optimala lösningen till problemet.

Tips: Detta görs enklast genom att starta med den lösning man tror är optimal och sedan verifiera detta med hjälp av reducerade kostnader. Det är inte en systematisk metod, men vi tillåter det i detta fall. .... (5p)

(b) Skriv det linjära optimeringsproblemet

$$(P)\quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{då} & x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2 \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{array}\right],$$

på standardform. .... (2p)

(c) Antag att x är en tillåten punkt till optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

och att y är en tillåten punkt till det duala optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & b^T y \\ \text{då} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Visa att $c^T x \geq b^T y$ måste gälla i så fall. ....(2p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right].$$

Skriv problemet på standardform med matriserna (A, b, c) och lös det med simplexalgoritmen.
Börja med variablerna $\{1, 2\}$ i basen. .... (4p)

(b) Bestäm en nollrumsmatris Z till A-matrisen motsvarande bivillkoren i (a) på standardform.

Låt $\bar{x}$ vara den startbaslösning som används i (a), och visa att den optimala lösningen $\hat{x}$ kan skrivas $\hat{x} = \bar{x} + Zv$ för någon vektor v. Ange vektorn v.

Om du inte har lyckats lösa (a)-uppgiften så kan du använda $\hat{x} = (0\ 0\ 1\ 1)^T$. Den är inte optimal men du kan i alla fall angripa uppgiften. .... (3p)

(c) Avgör om c-vektorn i (a)-uppgiften ligger i bildrummet till A^T-matrisen.
.... (2p)

(d) Avgör om c-vektorn i (a)-uppgiften ligger i det ortogonala komplementrummet till bildrummet till A^T-matrisen ....(2p)

3. Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & Ax = b \end{array} \right],$$

där $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + c^T x$ och A, b, H, c ges av

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad b = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array} \right], \quad H = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{array} \right], \quad c = \left[\begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 4 \end{array} \right].$$

(a) Visa att f är en strikt konvex funktion på hela $\mathbb{R}^3$. .... (2p)

(b) Använd nollrumsmetoden för att bestämma minimat till problemet. Är detta ett globalt minimum ? .... (5p)

(c) Verifiera att den optimala punkten du bestämt i (b)-uppgiften löser ekvationssystemet motsvarande Lagrangevillkoren, och bestäm de motsvarande Lagrangemultiplikatorerna. .... (3p)

4. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ & x_1^2 - 1 = x_2 \\ & x \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right]$$

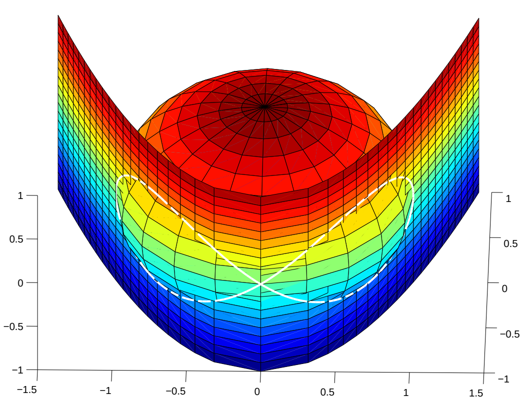
där $f(x) = e^{x_1+x_3} + x_2^4 + 4x_2 - (x_1 + x_3)$,

(a) Är målfunktionen konvex ?
Är det tillåtna området konvext ?
Är detta ett konvext optimeringsproblem ?
Motivera dina svar. .... (3p)

(b) Det finns tre stycken tillåtna punkter sådana att $x_3 = 0$, hitta dessa. .... (1p)

(c) Vilka av punkterna i (b) uppfyller KKT-villkoren ? .... (3p)

(d) Är någon av punkterna i (b) globalt optimal för optimeringsproblemet ? Motivera noga. .... (3p)



5. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1^2 - 1 \leq x_2 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right]$$

där $f(x) = e^{-x_1} - x_2^2$,

(a) Är målfunktionen konvex ?
Är det tillåtna området konvext ?
Är detta ett konvext optimeringsproblem ?
Motivera dina svar. .... (2p)

(b) Uppfyller punkten $x^{(b)} = (1, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan man från detta dra slutsatsen att $x^{(b)}$ är ett lokalt minimum ?
Motivera svaret väl. .... (3p)

(c) Man kan visa att det globala optimat ligger någonstans utefter den kvartscirkelbåge som ligger i den positiva kvadranten. Vilken ekvation måste x_1 koordinaten för denna punkt uppfylla? .... (3p)

(d) Visa att punkten i (c) faktiskt är ett globalt optimum. .... (2p)

Lycka till!