KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 (SF1851) Optimeringslära för T (E).
Tisdag 23 augusti 2011 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

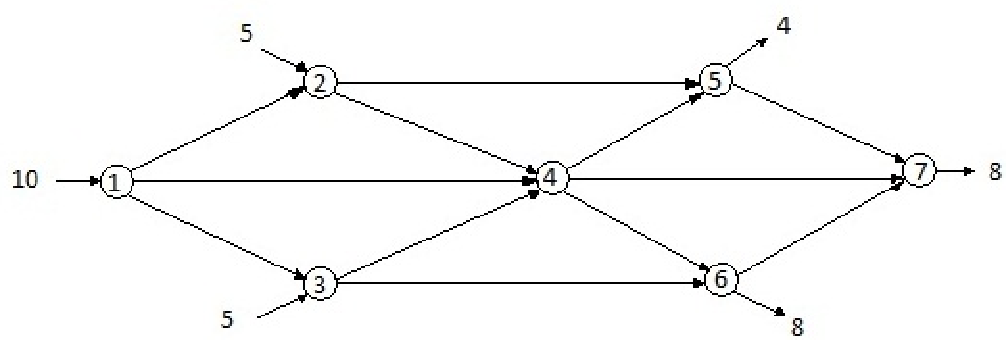
---

1. (a) I denna uppgift är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till vardera av de två fundamentala underrummen $\mathcal{R}(A)$ och $\mathcal{N}(A^T)$ och visa att basvektorerna i den ena basen är ortogonala mot basvektorerna i den andra. .... (5p)

(b) Betrakta följande nätverksproblem:



Bestäm ett spännande träd för grafen ovan, och motsvarande baslösning. Är baslösningen som du bestämt tillåten till nätverksproblemet .... (4p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array} \right].$$

Lös (P) med Simplex-algoritmen.
Börja med basindexmängden $\beta = \{1, 2\}$, dvs x_1 och x_2 som basvariabler. (4p)

(b) Skriv ut explicit vad dualen (D) till (P) är. .... (2p)

(c) Det tillåtna området till dualen är ett område i $\mathbb{R}^2$. Rita en figur över detta område. .... (2p)

(d) Bestäm lösningen till detta duala problem.
Lösningen till dualen får bestämmas på godtyckligt sätt, så länge som ni verifierar att punkten ni erhåller verkligen är optimal. .... (2p)

3. Låt i denna uppgift

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Avgör om ekvationssystemet $Ax = b$ har någon lösning. .... (1p)

(b) Bestäm *en* vektor $x^* \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $\|Ax - b\|^2$.
Notera att 2-normen ges av $\|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$. .... (3p)

(c) Bestäm den unika vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ som är kortast (har minst norm) av alla de vektorer $x \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $\|Ax - b\|^2$. .... (3p)

(d) Visa att $A\hat{x} - b$ är ortogonal mot bildrummet till A. (Vi godtar både generellt teoretiskt bevis, och att man visar det för det $\hat{x}$ som bestämts i (c)) ..... (3p)

4. (a) Är funktionen

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$$

strikt konvex för alla $x \in I\!R^3$? .... (3p)

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (0, 1, 0)$ och genomför två steg med Newtons metod och bestäm alltså nästa två iterationspunkter. Vad kan vi säga om den punkt vi då erhåller? .... (3p)

(c) Betrakta nu optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0. \end{bmatrix},$$

Är optimeringsproblemet konvext? .... (1p)

(d) Är punkten $\hat{x} = (1, 1, 1)$ en lokal eller global minpunkt till (P) ? .... (4p)

5. (a) Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P_1) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 1 \end{bmatrix}$$

där $f(x) = x_1x_3$.
Är (P_1) ett konvext optimeringsproblem ?
Bestäm en punkt som uppfyller Lagrange-villkoren för problemet.
Kan vi säga att det är ett globalt optimum ? .... (5p)

(b) Betrakta nu det besläktade icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P_2) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & g(x) \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 1 \end{bmatrix}$$

där $g(x) = x_1x_2^2x_3$.
Är (P_2) ett konvext optimeringsproblem ?
Uppfyller punkten $x^{(*)} = (1/2, 1/2, 1/2)$ Lagrange-villkoren för problemet?
Kan vi säga att det är ett globalt optimum ? .... (5p)

Lycka till!