Lösningar till 5B1762 Optimeringslära för T, 29/8-06

Uppgift 1.(a)

Inför följande variabler för den aktuella veckan:

x_{MH} = antal kg Havre som används till MUU,
x_{MR} = antal kg Råg som används till MUU,
x_{MP} = antal kg Potatis som används till MUU,
x_{GH} = antal kg Havre som används till GNÄGG,
x_{GR} = antal kg Råg som används till GNÄGG,
x_{GP} = antal kg Potatis som används till GNÄGG.

Då kan problemet formuleras enligt följande:

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & 2.00x_{MH} + 1.50x_{MR} + 2.50x_{MP} + \\ & \quad 2.00x_{GH} + 1.50x_{GR} + 2.50x_{GP} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{då} & x_{MH} + x_{MR} + x_{MP} & = & 2000 \\ & x_{GH} + x_{GR} + x_{GP} & = & 1000 \\ & x_{MH} + x_{GH} & \leq & 1000 \\ & x_{MR} + x_{GR} & \leq & 1000 \\ & x_{MP} + x_{GP} & \leq & 2000 \\ & 32x_{MH} + 24x_{MR} + 49x_{MP} & \geq & 76000 \\ & 32x_{GH} + 24x_{GR} + 49x_{GP} & \geq & 33000 \\ & 10x_{MH} + 7x_{MR} + 5x_{MP} & \geq & 12000 \\ & 10x_{GH} + 7x_{GR} + 5x_{GP} & \geq & 7000 \\ & 7x_{MH} + 8x_{MR} + 12x_{MP} & \geq & 14000 \\ & 7x_{GH} + 8x_{GR} + 12x_{GP} & \geq & 9000 \\ & x_{MH},\ x_{MR},\ x_{MP},\ x_{GH},\ x_{GR},\ x_{GP} & \geq & 0 \end{array}$$

Uppgift 1.(b)

Att problemet är ett minkostnadsflödesproblem följer av att varje kolonn i $\mathbf{A}$ består av ett element $+1$, ett element -1, och resten 0 :or. Varje rad i $\mathbf{A}$ svarar då mot en nod i nätverket och varje kolonn i $\mathbf{A}$ svarar mot en båge i nätverket, nämligen en båge *från* den nod som svarar mot raden med $+1$ *till* den nod som svarar mot raden med -1. Nätverket består alltså av fem stycken noder samt bågmängden $\mathcal{B} = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5)\}$. Noderna nr 1 och 2 är källnoder med påfyllningen 40 resp 35 flödesenheter, medan noderna 3, 4 och 5 är sänknoder med avtappningen 30, 25 resp 20 flödesenheter.

Den föreslagna lösningen är tillåten, ty $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Vidare svarar den mot ett uppspännande träd i nätverket med basbågarna $\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,5)\}$.
Den föreslagna lösningen är alltså en tillåten baslösning.
De reducerade kostnaderna ges nu ur formeln

$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \quad \text{för alla icke-basbågar,}$$

där skalärerna (simplexmultiplikatorerna) y_i ges ur formeln

$$y_i - y_j = c_{ij} \quad \text{för alla basbågar samt } y_5 = 0.$$

Skalärerna y_i beräknas i exempelvis följande ordning:
Först sätts $y_5 = 0$, vilket gäller per definition.
Basbågen $(3,5)$ ger sedan att $y_3 - y_5 = c_{35}$, dvs $y_3 = c_{35} = 1$.
Basbågen $(2,3)$ ger sedan att $y_2 - y_3 = c_{23}$, dvs $y_2 = y_3 + c_{23} = 3$.
Basbågen $(2,4)$ ger sedan att $y_2 - y_4 = c_{24}$, dvs $y_4 = y_2 - c_{24} = 1$.
Basbågen $(1,2)$ ger slutligen att $y_1 - y_2 = c_{12}$, dvs $y_1 = y_2 + c_{12} = 5$.

Nästa steg är att beräkna reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna, vilket ger
$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 5 - 5 + 1 = 1$,
$r_{34} = c_{34} - y_3 + y_4 = 1 - 1 + 1 = 1$,
$r_{45} = c_{45} - y_4 + y_5 = 2 - 1 = 1$.
Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är den givna tillåtna baslösningen optimal.

Uppgift 2.(a)

Om vi inför slackvariabler x_5 och x_6, för att överföra olikhetsbivillkoren till likhetsbivillkor, samt byter tecken på målfunktionen, för att överföra maximeringsproblemet till ett minimeringsproblem, så får vi ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-3, -4, -2, -1, 0, 0)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_5 och x_6, vilket innebär att $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-3, -4, -2, -1) - (0, 0) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-3, -4, -2, -1).$$

Eftersom $r_{\delta_2} = r_2 = -4$ är minst, och < 0, ska vi låta x_2 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_2$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_2 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} \mid \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{18}{2}, \frac{12}{2} \right\} = \frac{12}{2} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_6$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_2.

Nu är alltså $\beta = (5, 2)$ och $\delta = (1, 6, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-3,\, 0, -2, -1) - (0, -2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1,\, 2,\, 0,\, 1).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 0,\ x_2 = 6,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är -24 till minimeringsproblemet och $+24$ till maximeringsproblemet.

Uppgift 2.(b)

Eftersom $r_{\delta_3} = r_3 = 0$ så påverkas inte målfunktionen om vi låter ickebasvariabeln x_3 öka från sitt aktuella värde 0. Vi kan därför låta x_3 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_3$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_3 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{6}{0.5} \right\} = \frac{6}{1} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{13}}.$$

Minimerande index är $i = 1$, varför $x_{\beta_1} = x_5$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_3.

Nu är alltså $\beta = (3, 2)$ och $\delta = (1, 6, 5, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-3,\, 0,\, 0, -1) - (0, -2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1,\, 2,\, 0,\, 1).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är även denna baslösningen optimal (vilket vi redan visste).

Därmed är punkten $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är -24 till minimeringsproblemet och $+24$ till maximeringsproblemet.

Uppgift 3.(a)

Vi utför radoperationer (Gauss-Jordan) på matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$.

Addition av (+0.5) gånger första raden till andra raden,
samt addition av (+0.5) gånger första raden till tredje raden, ger

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 13.5 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & -4.5 \end{bmatrix}.$$

Addition av (+1) gånger andra raden till tredje raden ger

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tredje raden motsvarar nu ekvationen $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 9$ som inte har någon lösning.

Uppgift 3.(b)

Att minimera $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2$ är ekvivalent med att lösa normalekvationerna $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

Vi utför därför radoperationer på matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 18 \\ -3 & 6 & -3 & 18 \\ -3 & -3 & 6 & -36 \end{bmatrix}$.

Addition av (+0.5) gånger första raden till andra raden,
samt addition av (+0.5) gånger första raden till tredje raden, ger

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 18 \\ 0 & 4.5 & -4.5 & 27 \\ 0 & -4.5 & 4.5 & -27 \end{bmatrix}.$$

Addition av (+1) gånger andra raden till tredje raden,
samt addition av (+2/3) gånger första raden till tredje raden, ger

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 36 \\ 0 & 4.5 & -4.5 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En lösning (av flera) till detta systemet är $\bar{\mathbf{x}} = (6,\ 6,\ 0)^\mathsf{T}$.

Uppgift 3.(c)

En lösning till normalekvationerna är enligt ovan $\bar{\mathbf{x}} = (6,\ 6,\ 0)^\mathsf{T}$.
Sätt $\mathbf{p} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = (6,\ 6,\ -12)^\mathsf{T}$.
Då gäller ekvivalenserna $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Ax} = \mathbf{p}$.

Vi ska nu minimera $\frac{1}{2}\,|\,\mathbf{x}\,|^2$ då $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$.

Optimal lösning till detta ges av $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, där $\mathbf{AA}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{p}$.

Vi utför därför radoperationer på matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} & \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 6 & -12 \end{bmatrix}$.

Addition av $(+0.5)$ gånger första raden till andra raden,
samt addition av $(+0.5)$ gånger första raden till tredje raden, ger

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 4.5 & -4.5 & 9 \\ 0 & -4.5 & 4.5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Addition av $(+1)$ gånger andra raden till tredje raden,
samt addition av $(+2/3)$ gånger första raden till tredje raden, ger

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 4.5 & -4.5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En lösning (av flera) till detta system är $\hat{\mathbf{u}} = (2,\ \ 2,\ \ 0)^{\mathsf{T}}$.

Då är $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{u}} = (2,\ \ 2,\ \ -4)^{\mathsf{T}}$ minimum-normlösningen till minsta-kvadratproblemet.

Uppgift 4.
Målfunktionen är $f(\mathbf{x}) = 8x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 6x_2$.

Gradienten till f ges av $\nabla f(\mathbf{x}) = (16x_1x_2^2 + 4x_1 - 4,\ 16x_1^2x_2 + 6x_2 - 6)^\mathsf{T}$.

Hessianen till f ges av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 16x_2^2+4 & 32x_1x_2 \\ 32x_1x_2 & 16x_1^2+6 \end{bmatrix}$.

Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ bestäms ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T}$, förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ är positivt definit (strikt positiva egenvärden 4 och 6), så

Newtonriktningen ges av $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, dvs $\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi prövar steget med $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 3 > 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ var för långt.

Vi halverar steget och prövar $t_1 = \frac{1}{2}$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -3.25 < 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så så steget $t_1 = \frac{1}{2}$ var OK.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod.

(b) f är konvex på hela $I\!R^2$ om och endast om Hessianen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 16x_2^2+4 & 32x_1x_2 \\ 32x_1x_2 & 16x_1^2+6 \end{bmatrix}$.
är positivt semidefinit för alla $x \in I\!R^2$.

Låt exempelvis $x_1 = x_2 = 1$. Då är $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20 & 32 \\ 32 & 22 \end{bmatrix}$ *inte* positivt semidefinit

(eftersom exempelvis determinanten är negativ). f är alltså inte konvex på hela $I\!R^2$.

(c) En underskattning till $f(\mathbf{x})$ kan erhållas genom att bortse från termen $x_1^2x_2^2$, som aldrig är negativ. För alla $\mathbf{x} \in I\!R^2$ är alltså $f(\mathbf{x}) \geq q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 6x_2$.

Den konvexa kvadratiska funktionen $q(\mathbf{x})$ har ett unikt globalt minimum i $\bar{\mathbf{x}} = (1\ ,1)^\mathsf{T}$, med $q(\bar{\mathbf{x}}) = -5$.

För alla $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$ gäller då att $f(\mathbf{x}) \geq q(\mathbf{x}) > -5$ och för $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ gäller att $f(\mathbf{x}) = 3 > -5$.

Alltså är $f(\mathbf{x}) > -5$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^2$.

Uppgift 5.

(a) Låt $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x}$, $g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} - 4$ och $g_2(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Då kan vårt givna problem skrivas: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_1(\mathbf{x}) \leq 0$ och $g_2(\mathbf{x}) \leq 0$.

Gradienterna ges av $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}$, $\nabla g_1(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{x}^\mathsf{T}$ och $\nabla g_2(\mathbf{x}) = -2\,\mathbf{x}^\mathsf{T}$.

KKT-villkoren för detta problem är:

KKT-1: $\nabla f(\mathbf{x}) + y_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + y_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}^\mathsf{T}$,

KKT-2: $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ för $i = 1, 2$,

KKT-3: $y_i \geq 0$ för $i = 1, 2$,

KKT-4: $y_i\, g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, 2$.

som i vårt speciella fall kan skrivas

KKT-1:
$$\begin{aligned} &2\,(5 + y_1 - y_2)x_1 = 0,\\ &2\,(-4 + y_1 - y_2)x_2 = 0,\\ &2\,(6 + y_1 - y_2)x_3 = 0,\\ &2\,(-3 + y_1 - y_2)x_4 = 0. \end{aligned}$$

KKT-2: $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} - 4 \leq 0$ och $1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq 0$.

KKT-3: $y_1 \geq 0$ och $y_2 \geq 0$.

KKT-4: $y_1(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} - 4) = 0$ och $y_2(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = 0$.

(b)

Ur KKT-4 följer att minst en av y_1 och y_2 måste vara $= 0$.

Ur KKT-1 följer att minst tre st av de fyra variablerna x_j måste vara $= 0$. Å andra sidan kan inte alla fyra variablerna x_j vara $= 0$ samtidigt, ty då uppfylls inte KKT-2. Alltså är exakt tre st av de fyra variablerna $x_j = 0$ i varje KKT-punkt.

Antag först att $x_1 \neq 0$ medan $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Då följer ur KKT-1 att $y_1 = 0$ och $y_2 = 5$, varefter KKT-4 ger att $x_1 = 1$ eller -1.

Antag sedan att $x_2 \neq 0$ medan $x_3 = x_4 = x_1 = 0$.
Då följer ur KKT-1 att $y_1 = 4$ och $y_2 = 0$, varefter KKT-4 ger att $x_2 = 2$ eller -2.

Antag nu att $x_3 \neq 0$ medan $x_4 = x_1 = x_2 = 0$.
Då följer ur KKT-1 att $y_1 = 0$ och $y_2 = 6$, varefter KKT-4 ger att $x_3 = 1$ eller -1.

Antag slutligen att $x_4 \neq 0$ medan $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Då följer ur KKT-1 att $y_1 = 3$ och $y_2 = 0$, varefter KKT-4 ger att $x_4 = 2$ eller -2.

Sammanfattningsvis har vi följande åtta KKT-punkter:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

(c) Det tillåtna området är begränsat och dessutom slutet, eftersom bivillkorsfunktionerna är kontinuerliga. Vidare är målfunktionen kontinuerlig. Då vet vi att det existerar minst en global optimallösning till problemet (se "röda häftet").

Varje punkt i tillåtna området är en regulär punkt, ty högst ett bivillkor är aktivt och gradienten till motsvarande bivillkorsfunktion är nollskild. Varje global (eller lokal) optimallösning måste därmed vara en KKT-punkt.

Eftersom det endast finns ändligt många (åtta stycken) KKT-punkter så är den/de bästa av dessa globalt optimal/optimala. (Bäst = lägst målfunktionsvärde.)

Det följer att punkterna $\mathbf{x} = (0, 2, 0, 0)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{x} = (0, -2, 0, 0)^\mathsf{T}$ är globala optimallösningar, båda med målfunktionsvärdet $= -16$.