Lösningar till SF1861 Optimeringslära, 28 maj 2012

Uppgift 1.(a)

Då det primala problemet P är

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 3x_1 + x_2 \\ \text{då} & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{array}$$

så är det motsvarande duala problemet D

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{då} & 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ & 2y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & y_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{array}$$

Tillåtna området till P ges, i ett koordinatsystem med x_1 och x_2 på axlarna, av det obegränsade område i positiva kvadranten som ligger "nordost" om de fyra linjestyckena L1: $(0, \infty) \to (0, 3)$, L2: $(0, 3) \to (1, 1.5)$, L3: $(1, 1.5) \to (4, 0)$ och L4: $(4, 0) \to (\infty, 0)$.
Nivåkurvorna till målfunktionen $3x_1 + x_2$ är parallella linjer vinkelräta mot vektorn $(3, 1)^\mathsf{T}$.
Ju längre åt "sydväst" en nivåkurva ligger, desto lägre målfunktionsvärde svarar den mot.
Det följer ur en figur att den unika optimala lösningen ges av hörnpunkten $\hat{\mathbf{x}} = (0, 3)^\mathsf{T}$.

Tillåtna området till D ges, i ett koordinatsystem med y_1 och y_2 på axlarna, av den triangel som har hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0.5,\ 0)$ och $(0,\ 0.5)$.
Nivåkurvorna till målfunktionen $6y_1 + 4y_2$ är parallella linjer vinkelräta mot vektorn $(6, 4)^\mathsf{T}$.
Ju längre åt "nordost" en nivåkurva ligger, desto högre målfunktionsvärde svarar den mot.
Det följer ur en figur att den unika optimala lösningen ges av hörnpunkten $\hat{\mathbf{y}} = (0.5,\ 0)^\mathsf{T}$.

Optimalvärdet till P blir $3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$, medan optimalvärdet till D blir $6 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0 = 3$.
Som synes är dessa optimalvärden lika. Enligt komplementaritetssatsen är $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ optimala till P resp D om de *dels* är tillåtna lösningar till resp problem, *dels* uppfyller följande villkor:

$\hat{y}_1 \cdot (3\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 6) = 0,$
$\hat{y}_2 \cdot (\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4) = 0,$
$\hat{x}_1 \cdot (3 - 3\hat{y}_1 - \hat{y}_2) = 0,$
$\hat{x}_2 \cdot (1 - 2\hat{y}_1 - 2\hat{y}_2) = 0.$

En snabb koll visar att $\hat{\mathbf{x}} = (0, 3)^\mathsf{T}$ och $\hat{\mathbf{y}} = (0.5,\ 0)^\mathsf{T}$ uppfyller allt detta.

Uppgift 1.(b)

Först överför vi $\mathbf{A}$ till reducerad trappstegsform med Gauss–Jordans metod:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Matrisen $\mathbf{U}$ är på reducerad trappstegsform med två *trappstegsettor*, i kolonnerna 1 och 2.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{U}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:
I ekvationssystemet $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$ kan varje "fri" variabel (som inte svarar mot någon trappstegsetta) sättas till en godtyckliga parameter. I vårt fall kan vi sätta $x_3 = t$ och $x_4 = s$.
Då ges den allmänna lösningen till $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$ (och därmed även till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$) av
$x_1 = t + s,\ \ x_2 = -t - 2s,\ \ x_3 = t,\ \ x_4 = s,$ som kan skrivas
$(x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T} = t \cdot (1, -1, 1, 0)^\mathsf{T} + s \cdot (1, -2, 0, 1)^\mathsf{T}$, ur vilket följer att

vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Nu överför vi $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ till reducerad trappstegsform med Gauss–Jordans metod:

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}.$$

Matrisen $\tilde{\mathbf{U}}$ är på reducerad trappstegsform med *trappstegsettor* i kolonnerna 1 och 2.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{U}}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ kan bestämmas enligt följande:
I ekvationssystemet $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ har vi endast en "fri" variabel y_3 som vi sätter till t.
Då ges den allmänna lösningen till $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (och därmed även till $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0}$) av
$y_1 = -2t,\ \ y_2 = t,\ \ y_3 = t,$ som kan skrivas $(y_1, y_2, y_3)^\mathsf{T} = t \cdot (-2, 1, 1)^\mathsf{T}$,

ur vilket följer att vektorn $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Uppgift 2.(a)

Vi har här ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^{\mathsf{T}} = (2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2)$.

Den givna startlösningen ska ha basvariablerna x_1 och x_5, vilket innebär att $\beta = (1,5)$ och $\nu = (2,3,4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\nu^{\mathsf{T}} = \mathbf{c}_\nu^{\mathsf{T}} - \mathbf{y}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}_\nu = (2,\ 1,\ 2) - (0.5,\ 0.5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (0,\ -1,\ 0).$

Eftersom $r_{\nu_2} = r_3 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_3 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_3$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$,

dvs $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_3 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1.0}{0.5}, \ \frac{1.5}{0.5} \right\} = \frac{1.0}{0.5} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{13}}.$$

Minimerande index är $i = 1$, varför $x_{\beta_1} = x_1$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_3.

Nu är alltså $\beta = (3,5)$ och $\nu = (2,1,4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,
dvs $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av
$\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\nu = (2,\ 2,\ 2) - (0.5,\ 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (1.5,\ 2,\ 0.5).$

Eftersom $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.
Därmed är punkten $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 0, 0.5)^\mathsf{T}$ optimal. Optimalvärdet är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 3$.

Uppgift 2.(b)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som utskrivet blir:

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{maximera} & 6y_1 & + & 4y_2 & & \\ \text{då} & & & 4y_2 & \leq & 2, \\ & y_1 & + & 3y_2 & \leq & 2, \\ & 2y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1, \\ & 3y_1 & + & y_2 & \leq & 2, \\ & 4y_1 & & & \leq & 2. \end{array}$$

Det är välkänt att en optimal lösning till detta duala problem ges av vektorn $\mathbf{y}$ med "simplexmultiplikatorerna" i optimala baslösningen i (a)-uppgiften, dvs $\mathbf{y} = (0.5,\ 0)^\mathsf{T}$.
Kontroll: Man verifierar snabbt att $\mathbf{y}$ är en tillåten lösning till det duala problemet ovan.
Vidare är duala målfunktionsvärdet $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = 6y_1 + 4y_2 = 3 - 0 = 3 =$ optimalvärdet till det primala problemet i (a)-uppgiften. Alltså är $\mathbf{y}$ optimal till det duala problemet.

Uppgift 2.(c)

Om man stryker det andra bivillkoret i primala problemet så innebär det att det motsvarande reducerade duala problemet blir

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{maximera} & 6y_1 & & & \\
\text{då} & 0y_1 & \leq & 2, & (\text{dvs } 0 \leq 2) \\
& y_1 & \leq & 2, & \\
& 2y_1 & \leq & 1, & (\text{dvs } y_1 \leq 1/2) \\
& 3y_1 & \leq & 2, & (\text{dvs } y_1 \leq 2/3) \\
& 4y_1 & \leq & 2. & (\text{dvs } y_1 \leq 1/2)
\end{array}
$$

Optimal lösning till detta problem är $y_1 = 0.5$, med optimalvärdet $6y_1 = 3$. Men det medför att optimalvärdet till det reducerade primala problemet också måste vara $= 3$.
Eftersom optimala primallösningen $\mathbf{x} = (0,0,2,0,0.5)^\mathsf{T}$ från (a)-uppgiften är tillåten även till det reducerade primala problemet, och fortfarande har målfunktionsvärdet $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 3$,
så är $\mathbf{x} = (0,0,2,0,0.5)^\mathsf{T}$ en optimal lösning även till det reducerade primala problemet!
(Dock inte en baslösning till detta. Två optimala baslösningar till det reducerade primala problemet är $\mathbf{x} = (0,0,3,0,0)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{x} = (0,0,0,0,1.5)^\mathsf{T}$.)

Uppgift 2.(d)

Om man stryker det första bivillkoret i primala problemet i (a)-uppgiften så innebär det att det motsvarande reducerade duala problemet blir

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{maximera} & 4y_2 & & & \\
\text{då} & 4y_2 & \leq & 2, & (\text{dvs } y_2 \leq 1/2) \\
& 3y_2 & \leq & 2, & (\text{dvs } y_2 \leq 2/3) \\
& 2y_2 & \leq & 1, & (\text{dvs } y_2 \leq 1/2) \\
& y_2 & \leq & 2, & \\
& 0y_2 & \leq & 2. & (\text{dvs } 0 \leq 2)
\end{array}
$$

Optimal lösning till detta problem är $y_2 = 0.5$, med optimalvärdet $4y_2 = 2$. Men det medför att optimalvärdet till det reducerade primala problemet också måste vara $= 2$.
Men den optimala primallösningen $\mathbf{x} = (0,0,2,0,0.5)^\mathsf{T}$ från (a)-uppgiften har fortfarande målfunktionsvärdet $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 3$, så den är inte optimal till reducerade primala problemet!
(Två optimala lösningar är $\mathbf{x} = (0,0,2,0,0)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{x} = (1,0,0,0,0)^\mathsf{T}$.)

Uppgift 3.(a)

Flödesbalansvillkoren i de fem noderna kan skrivas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \\ -35 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = (\, c_{12},\ c_{13},\ c_{14},\ c_{23},\ c_{25},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{45}\,)^{\mathsf{T}} = (\, 1,\ k,\ k,\ 1,\ k,\ 1,\ k,\ 1)^{\mathsf{T}}.$$

$$\mathbf{x} = (\, x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{25},\ x_{34},\ x_{35},\ x_{45}\,)^{\mathsf{T}},$$

Här betecknar variabeln x_{ij} flödet i bågen som går från nod i till nod j.

Att bågarna är (enkel-)riktade ger kravet att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Det är som bekant möjligt (och rekommendabelt) att stryka en rad i $\mathbf{A}$ och motsvarande komponent i $\mathbf{b}$ för att få ett problem med linjärt oberoende rader i bivillkorsmatrisen. Vanligtvis stryker man sista raden i $\mathbf{A}$ och sista komponenten i $\mathbf{b}$.

Uppgift 3.(b)

Om x_{12}, x_{23}, x_{34} och x_{45} är basvariabler kan man beräkna värdet på en i taget av dessa med hjälp av flödesbalansvillkoren i noderna:
$x_{12} = 30$, pga flödesbalans i nod 1,
$x_{23} = 50$, pga flödesbalans i nod 2,
$x_{34} = 50$, pga flödesbalans i nod 3,
$x_{45} = 15$, pga flödesbalans i nod 4.
Vi ser att flödesbalansvillkoret i nod 5 också blev uppfyllt
(eftersom problemet är balanserat).

Uppgift 3.(c)

"Simplexmultiplikatorerna" (eller "nodpriserna") y_i för de olika noderna kan bestämmas en i taget med hjälp av sambandet $y_i - y_j = c_{ij}$ för alla basbågar, samt $y_5 = 0$. Det ger att
$y_5 = 0$, (per definition)
$y_4 = c_{45} + y_5 = 1 + 0 = 1$,
$y_3 = c_{34} + y_4 = 1 + 1 = 2$,
$y_2 = c_{23} + y_3 = 1 + 2 = 3$,
$y_1 = c_{12} + y_2 = 1 + 3 = 4$.
Därefter bestäms reducerade kostnaderna r_{ij} för alla ickebasvariabler ur sambandet
$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$ för alla ickebasbågar. Det ger att
$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = k - 4 + 2 = k - 2$,
$r_{14} = c_{14} - y_1 + y_4 = k - 4 + 1 = k - 3$,
$r_{25} = c_{25} - y_2 + y_5 = k - 3 + 0 = k - 3$,
$r_{35} = c_{35} - y_3 + y_5 = k - 2 + 0 = k - 2$.
Vi ser att om $k \geq 3$ så är den aktuella baslösningen från (b)-uppgiften optimal.
Om $k < 3$ kan vi t ex låta $x_{14} = t$, $x_{12} = 30 - t$, $x_{23} = 50 - t$, $x_{34} = 50 - t$ och $x_{45} = 15$.
För $t \in (0, 30\,]$ är detta en tillåten lösning med strikt minskande målfunktionsvärde då t växer, vilket visar att baslösningen från (b)-uppgiften inte längre är optimal om $k < 3$.

Uppgift 4.(a)

Målfunktionen är $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

LDL^T-faktorisering av $\mathbf{H}$ ger att

$$\mathbf{H} = \mathbf{LDL}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alla diagonalelement i $\mathbf{D}$ är ≥ 0 vilket medför att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit.
Dock inte positivt definit eftersom ett diagonalelement i $\mathbf{D}$ är $= 0$.

Uppgift 4.(b)

Eftersom $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit så är $\hat{\mathbf{x}}$ en minpunkt till $f(\mathbf{x})$ om och endast om $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$,
dvs om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ är en lösning till systemet $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -c_3 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordans metod ger att

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -c_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 - 2 \end{array}\right]$$

Vi ser att om $c_3 \neq -2$ så saknar systemet lösning (och då har f ingen minpunkt).

Om $c_3 = -2$ så ges lösningsmängden av

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^\mathsf{T} = (-1, -1,\, 0)^\mathsf{T} + t \cdot (1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$, där t är ett godtyckligt tal.

Samtliga dessa lösningar uppfyller att $f(\mathbf{x}(t)) = -1$.

Uppgift 4.(c)

Antag nu att $\mathbf{c} = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$. Då har f alltså ingen minpunkt.

När en konvex kvadratisk funktion saknar minpunkt så finns det i stället (minst) en riktning $\mathbf{d}$ sådan att $f(t \cdot \mathbf{d}) \to -\infty$ då $t \to \infty$. Vi söker en sådan riktning.
Eftersom $f(t \cdot \mathbf{d}) = \frac{1}{2}\, t^2 \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + t\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d}$, så är $\mathbf{d}$ en sådan riktning om och endast om $\mathbf{H}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} < 0$.

En bas för nollrummet till $\mathbf{H}$ ges av vektorn $(1, 1, 1)^\mathsf{T}$ (följer från (b)-upppgiften ovan),
så med $\mathbf{d} = (-1, -1, -1)^\mathsf{T}$ uppnår vi att $\mathbf{H}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = -3 < 0$.

Nu blir $f(t \cdot \mathbf{d}) = -3t$.

Speciellt med $\mathbf{x} = 10^6 \cdot \mathbf{d} = (-10^6, -10^6, -10^6)^\mathsf{T}$ får vi att $f(\mathbf{x}) = -3 \cdot 10^6 < -10^6$.

Uppgift 4.(d)

Vi har i denna deluppgift ett QP med likhetsbivillkor, dvs ett problem på formen

minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

där $\mathbf{A} = [1 \;\; 1 \;\; 1]$, $\mathbf{b} = 1$, $\mathbf{H}$ enligt ovan och $\mathbf{c} = (1,1,1)^{\mathsf{T}}$.

Allmänna lösningen till $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dvs till $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, ges av

$(x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} = (1,0,0)^{\mathsf{T}} + t \cdot (-1,1,0)^{\mathsf{T}} + s \cdot (-1,0,1)^{\mathsf{T}}$,

ur vilket följer att $\bar{\mathbf{x}} = (1,0,0)^{\mathsf{T}}$ är en tillåten lösning och $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är en matris vars kolonner utgör en bas för nollrummet till $\mathbf{A}$.

Variabelbytet $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{v}$, leder till att vi ska lösa systemet

$(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$,

förutsatt att $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ är åtminstone positivt semidefinit.

Vi får att $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, som är positivt definit, och $-\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Systemet $(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$ har då den unika lösningen $\hat{\mathbf{v}} = (1/3,\, 1/3)^{\mathsf{T}}$,

vilket ger att $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{v} = (1/3,\, 1/3,\, 1/3)$ är unik optimal lösning till ursprungsproblemet.

Uppgift 5.(a)

Låt $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3-2)^2$, $g_1(\mathbf{x}) = (x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, $g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 - 1$.

Då kan Problem 1 skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2$.

Problem 2 kan skrivas på formen: maximera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2$,
eller, ekvivalent, på formen: minimera $-f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2$.

KKT-villkoren för Problem 1:

(KKT–1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + y_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j} + y_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_j} = 0$ för $j = 1, 2, 3$, dvs

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2y_1(x_1 - 1) + 2y_2 x_1 = 0,\\
&2x_2 + 2y_1 x_2 + 2y_2(x_2 - 1) = 0,\\
&2(x_3 - 2) + 2y_1 x_3 + 2y_2 x_3 = 0,
\end{aligned}$$

(KKT–2) $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2$, dvs:

$$\begin{aligned}
&(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \le 0,\\
&x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 - 1 \le 0,
\end{aligned}$$

(KKT–3) $y_1 \ge 0$ och $y_2 \ge 0$.

(KKT–4) $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, 2$, dvs:

$$\begin{aligned}
&y_1((x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0,\\
&y_2(x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

KKT-villkoren för Problem 2:

Skriv Problem 2 på formen: minimera $-f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2$.

Då blir (KKT–2), (KKT–3) och (KKT–4) för Problem 2 identiska med (KKT–2), (KKT–3) och (KKT–4) för Problem 1, medan (KKT–1) nu blir

(KKT–1) $-\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + y_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j} + y_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_j} = 0$ för $j = 1, 2, 3$, dvs

$$\begin{aligned}
&-2x_1 + 2y_1(x_1 - 1) + 2y_2 x_1 = 0,\\
&-2x_2 + 2y_1 x_2 + 2y_2(x_2 - 1) = 0,\\
&-2(x_3 - 2) + 2y_1 x_3 + 2y_2 x_3 = 0,
\end{aligned}$$

Uppgift 5.(b)

För alla fyra punkterna

$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$, $\mathbf{x}^{(3)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{x}^{(4)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$

gäller att $g_1(\mathbf{x}^{(k)}) = g_2(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$, så att såväl (KKT–2) som (KKT–4) är uppfyllda. Vi behöver alltså bara undersöka (KKT–1) och (KKT–3).

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$ så blir (KKT–1) för Problem 1 följande ekvationssystem i y_1 och y_2 (efter multiplikation av såväl vänsterled som högerled med 3/2):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Detta system saknar lösning, så $\mathbf{x}^{(1)}$ är **ej** en KKT-punkt till Problem 1.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(2)}$ så blir (KKT–1) för Problem 1 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Detta system har unik lösning $y_1 = y_2 = -2$, som dock inte uppfyller (KKT–3). $\mathbf{x}^{(2)}$ är alltså **ej** en KKT-punkt till Problem 1.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(3)}$ så blir (KKT–1) för Problem 1 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Detta system har unik lösning $y_1 = y_2 = 1$, som även uppfyller (KKT–3). $\mathbf{x}^{(3)}$ **är** alltså en KKT-punkt till Problem 1.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(4)}$ så blir (KKT–1) för Problem 1 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Detta system saknar lösning, så $\mathbf{x}^{(4)}$ är **ej** en KKT-punkt till Problem 1.

Uppgift 5.(c)

Även för Problem 2 gäller att de fyra givna punkterna uppfyller (KKT–2) och (KKT–4), så vi bara behöver undersöka (KKT–1) och (KKT–3).

För att spara arbete kan vi notera att de fyra ekvationssystem i y_1 och y_2 som vi ställde upp och löste i (b)-uppgiften ovan blir nästan likadana för Problem 2 som för Problem 1.
Enda skillnaden är att högerleden byter tecken, vilket gör att varje eventuell lösning också bara byter tecken!

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$ så blir (KKT–1) för Problem 2 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Detta system saknar lösning, så $\mathbf{x}^{(1)}$ är **ej** en KKT-punkt till Problem 2.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(2)}$ så blir (KKT–1) för Problem 2 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Detta system har unik lösning $y_1 = y_2 = 2$, som även uppfyller (KKT–3).
$\mathbf{x}^{(2)}$ **är** alltså en KKT-punkt till Problem 2.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(3)}$ så blir (KKT–1) för Problem 2 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Detta system har unik lösning $y_1 = y_2 = -1$, som dock inte uppfyller (KKT–3).
$\mathbf{x}^{(3)}$ är alltså **ej** en KKT-punkt till Problem 2.

Om $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(4)}$ så blir (KKT–1) för Problem 2 följande ekvationssystem i y_1 och y_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Detta system saknar lösning, så $\mathbf{x}^{(4)}$ är **ej** en KKT-punkt till Problem 2.

Uppgift 5.(d)

Såväl den kvadratiska målfunktionen f som de bägge kvadratiska bivillkorsfunktionerna g_i har andraderivatsmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, som är en positivt definit matris.

För problem 1 gäller alltså att både målfunktionen och bivillkorsfunktionerna konvexa, varför det betraktade problemet är ett konvext optimeringsproblem. Vidare uppfyller exempelvis $\mathbf{x} = (0.5, 0.5, 0)^\mathsf{T}$ båda bivillkoren med strikt olikhet, så det betraktade problemet är ett *regulärt* konvext problem. Det betyder att en punkt $\mathbf{x}^{(k)}$ är en globalt optimal lösning till Problem 1 om och endast om $\mathbf{x}^{(k)}$ är en KKT-punkt.

Eftersom $\mathbf{x}^{(3)}$ är en KKT-punkt till Problem 1 kan vi alltså dra slutsatsen att $\mathbf{x}^{(3)}$ är en globalt optimal lösning till Problem 1.
Däremot är ingen av de andra tre punkterna en global optimal lösning till Problem 1 eftersom de inte är KKT-punkter till Problem 1. (Dessutom har de sämre målfunktionsvärden än $\mathbf{x}^{(3)}$.)

För Problem 2, skrivet som ett minimeringsproblem, gäller att den kvadratiska målfunktionen -f har andraderivatsmatrisen $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, som är en negativt definit matris.

Målfunktionen i Problem 2, formulerat som minimeringsproblem, är alltså *inte* en konvex funktion, och därför kan vi inte dra någon slutsats om global optimalitet baserad på KKT-villkoren. Huruvida $\mathbf{x}^{(2)}$ är en globalt optimal lösning till Problem 2 kan vi inte veta baserat på vår undersökning i (c)-uppgiften ovan.
(I själva verket *är* $\mathbf{x}^{(2)}$ en globalt optimal lösning till Problem 2, men det krävs en noggrannare analys än KKT-villkoren för att visa detta.)