KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Fredag 24 maj 2013 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg (bortrest). *Jourhavande lärare:* Per Enqvist, tel. 790 62 98.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag har tre fabriker som var och en kan tillverka de fyra olika produkter som företaget säljer. Fabrikerna är olika utrustade, så de är olika snabba på att tillverka de olika produkterna. Man vet av erfarenhet att det tar T_{ij} timmar per ton för fabrik nr i att tillverka produkt nr j, för $i = 1, 2, 3$ och $j = 1, 2, 3, 4$.
En dag kommer en stor beställning från en viktig kund som ges högsta prioritet. Kunden beställer b_j ton av produkt j, för $j = 1, 2, 3, 4$.
(T_{ij} och b_j är givna tal, för $i = 1, 2, 3$ och $j = 1, 2, 3, 4$.)
Företaget ska nu snabbt planera hur mycket av respektive produkt som respektive fabrik ska åläggas att tillverka. Målet är att tiden tills alla tre fabrikerna är färdiga med sina respektive ålägganden (dvs tiden tills hela beställningen har klarats av) blir så liten som möjligt.
Din uppgift är att formulera detta planeringsproblem som ett LP-problem.
Förklara vad dina variabler, målfunktion och bivillkor står för. . . . .(5p)

(b) Låt $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & a \end{bmatrix}$, där a är en konstant.
Använd $\mathrm{LDL}^{\mathsf{T}}$-faktorisering av $\mathbf{H}$ för att besvara följande båda frågor:
(i) För vilket eller vilka värden på a är $\mathbf{H}$ positivt definit?
(ii) För vilket eller vilka värden på a är $\mathbf{H}$ positivt semidefinit?
Ange också matriserna $\mathbf{L}$ och $\mathbf{D}$ i ovanstående fall. . . . .(4p)

2. (a) Lös följande problem med simplexmetoden. Starta med x_1 och x_2 som basvariabler.

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 \\ \text{då} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Ange din erhållna optimala lösning $\hat{\mathbf{x}}$ samt motsvarande optimalvärde. . .(6p)

(b) Formulera det duala LP-problemet svarande mot LP-problemet i (a)-uppgiften. Åskådliggör detta duala problem grafiskt i en noggrann figur där tillåtna området och minst två nivåkurvor till målfunktionen är intritade. . . . .(3p)

(c) Bestäm, grafiskt eller på annat sätt, en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till det duala problemet samt motsvarande optimalvärde. . . . . (1p)

3. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att det inte finns någon lösning till ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. . . . .(1p)

(b) Bestäm en optimal lösning till problemet att minimera $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ då $\mathbf{x} \in I\!R^3$. Om det finns fler än en optimal lösning till detta minsta-kvadratproblem så ska du även bestämma den av alla optimala lösningar som har minst norm, dvs har lägst värde på $\|\mathbf{x}\|^2$. . . . .(6p)

(c) Bestäm en vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ (bildrummet till $\mathbf{A}$) och en vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ (nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$) sådana att $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ enligt ovan. . . (3p)

4. Man skulle vilja lösa det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_2 - x_1^2 &= 0.1\,, \\ x_2 + x_1^2 &= 0.1\,, \\ x_1 - x_2^2 &= 0.2\,, \\ x_1 + x_2^2 &= 0.2\,. \end{aligned}$$

(a) Visa att det inte finns någon lösning till detta system. . . . . (1p)

(b) Då vill man i stället lösa följande ickelinjära minsta-kvadratproblem:

$$\text{minimera} \quad f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(h_1(\mathbf{x})^2 + h_2(\mathbf{x})^2 + h_3(\mathbf{x})^2 + h_4(\mathbf{x})^2), \quad \mathbf{x} \in I\!R^2,$$

där funktionerna h_i ges av

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= x_2 - x_1^2 - 0.1\,, \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_2 + x_1^2 - 0.1\,, \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_1 - x_2^2 - 0.2\,, \\ h_4(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2^2 - 0.2\,. \end{aligned}$$

Genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$. Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. . . . . . .(4p)

(c) Genomför nu i stället en iteration med Newtons metod utgående från samma startpunkt som nyss, dvs $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$. . . . .(2p)

(d) Är den ovan definierade funktionen $f(\mathbf{x})$ konvex på hela $I\!R^2$? Motivera svaret ordentligt. . . . .(3p)

5. Betrakta följande ickelinjära optimeringsproblem. där a_1 och a_2 är två konstanter.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & (x_1 - a_1)^4 + (x_2 - a_2)^4 \\ \text{då} & (x_1 - 3)^4 + (x_2 - 1)^4 \leq 16, \\ & (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^4 \leq 16. \end{array}$$

Observera potenserna **4** i såväl målfunktionen som i bivillkorsfunktionerna!

(a) Ställ upp KKT-villkoren för problemet. . . . . (1p)

(b) Gäller det för samtliga värden på konstanterna a_1 och a_2 att varje KKT-punkt är en globalt optimal lösning till problemet? Motivera svaret ordentligt. (Kända satser får användas utan bevis.) . . . . (2p)

(c) För vissa värden på konstanterna a_1 och a_2 är $\hat{\mathbf{x}} = (3,\, 3)$ en KKT-punkt till problemet. Bestäm samtliga värden på a_1 och a_2 för vilka detta är fallet! Ange också motsvarande värden på (Lagrangemultiplikatorerna) $\hat{y}_1$ och $\hat{y}_2$, som typiskt beror på vilka värden a_1 och a_2 har. . . . . (4p)

(d) Bestäm nu samtliga värden på konstanterna a_1 och a_2 för vilka
$\hat{\mathbf{x}} = (3{-}2^{3/4},\, 1{+}2^{3/4})^\mathsf{T}$ är en KKT-punkt till problemet.
Ange också motsvarande värden på $\hat{y}_1$ och $\hat{y}_2$. . . . . (4p)

Lycka till!