KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Måndag 28 maj 2012 kl. 14.00–19.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Betrakta följande LP-problem P :

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{då} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{aligned}$$

Formulera det motsvarande duala LP-problemet D.
Bestäm sedan grafiskt, i två noggranna figurer, en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till P (i ena figuren) och en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till D (i andra figuren).
Kontrollera speciellt att optimalvärdena är lika för P och D, samt att $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ uppfyller villkoren i komplementaritetssatsen. . . . . (5p)

(b) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till matrisen $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. . . . . (4p)

2. I denna uppgift ska följande linjära optimeringsproblem på standardform behandlas:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ \text{då} \quad & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 6, \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

(a) Använd Simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning till problemet. Starta med x_1 och x_5 som basvariabler. . . . . (6p)

(b) Formulera det motsvarande duala problemet och ange en optimal lösning till detta. .... (2p)

(c) Antag att vi stryker det andra bivillkoret i ursprungsproblemet, så att det primala problemet reduceras till:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ \text{då} & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 6, \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5. \end{array}$$

Avgör om den optimala lösningen till (a)-uppgiften är en optimal lösning till detta reducerade problem. .... (2p)

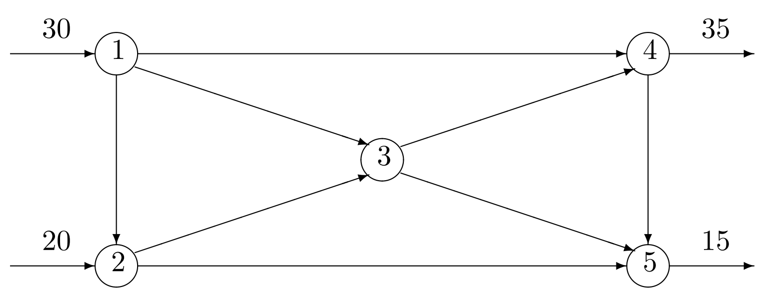
(d) Antag nu att vi i stället stryker det första bivillkoret i ursprungsproblemet, så att det primala problemet reduceras till:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ \text{då} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5. \end{array}$$

Avgör om den optimala lösningen till (a)-uppgiften är en optimal lösning till detta reducerade problem. .... (2p)

3. I nedanstående nätverk är noderna 1 och 2 källnoder, med tillgångar 30 respektive 20 enheter. Noderna 4 och 5 är sänknoder, med efterfrågan 35 respektive 15 enheter, medan nod 3 är en mellannod. Kostnaderna per flödesenhet i bågarna ges av

$c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} = 1$, $c_{13} = c_{14} = c_{25} = c_{35} = k$, där k är en konstant > 1.



(a) Minkostnadsflödesproblemet svarande mot dessa förutsättningar kan formuleras som ett LP-problem på formen: minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
Ange i detalj hur $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ ser ut i detta fall, samt hur variabelvektorn $\mathbf{x}$ är definierad och vad dess komponenter står för. .... (2p)

(b) De fyra bågarna med $c_{ij} = 1$ utgör ett uppspännande träd, så genom att endast skicka flöde i dessa fyra bågar erhålls en baslösning till problemet.
Bestäm denna baslösning och avgör om det är en *tillåten* baslösning. .... (2p)

(c) Bestäm de reducerade kostnaderna, svarande mot baslösningen ovan, för de fyra bågarna med $c_{ij} = k$. Avgör sedan för vilka värden på k som baslösningen ovan är en optimal lösning till minkostnadsflödesproblemet? .... (2p)

4. Låt $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

(a) Avgör, med hjälp av LDL^T-faktorisering, om $\mathbf{H}$ är positivt definit eller positivt semidefinit eller ingetdera. .... (3p)

(b) Finns det något värde på konstanten c_3 ovan för vilket funktionen f har minst en minpunkt? Bestäm i såfall ett sådant värde på c_3, samt beräkna samtliga minpunkter till f för detta värde på c_3. Kontrollera speciellt att alla dessa punkter ger samma värde på $f(\mathbf{x})$. .... (4p)

(c) Antag att $c_3 = 1$. Bestäm en punkt $\bar{\mathbf{x}} \in I\!R^3$ sådan att $f(\bar{\mathbf{x}}) < -10^6$. ..... (2p)

(d) (Kan lösas oberoende av deluppgifterna ovan.)
Antag igen att $c_3 = 1$. Använd en nollrumsmetod för att minimera $f(\mathbf{x})$ under det linjära likhetsbivillkoret att $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ange även huruvida din erhållna punkt är en unik optimal lösning till problemet. .... (4p)

5. Bland alla punkter i $I\!R^3$ som ligger på högst avståndet 1 från såväl punkten $(1,0,0)^\mathsf{T}$ som från punkten $(0,1,0)^\mathsf{T}$ vill man bestämma dels den punkt som ligger *närmast* punkten $(0,0,2)^\mathsf{T}$, här kallat "Problem 1", dels den punkt som ligger *längst bort* från punkten $(0,0,2)^\mathsf{T}$, här kallat "Problem 2". Båda dessa problem kan formuleras som ickelinjära optimeringsproblem med olikhetsbivillkor, där såväl målfunktionerna som bivillkorsfunktionerna är kvadratiska funktioner.

(a) Formulera de bägge problemen på matematisk form och ställ upp de fullständiga KKT-villkoren för vart och ett av problemen. .... (2p)

(b) Någon föreslår att man bör undersöka följande fyra punkter:
$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}, \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}, \mathbf{x}^{(3)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}, \mathbf{x}^{(4)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}.$
Avgör om någon eller några av dessa är en KKT-punkt till Problem 1, dvs en punkt som tillsammans med skalärer y_i uppfyller KKT-villkoren för Problem 1. .... (3p)

(c) Avgör nu också om någon eller några av de fyra punkterna är en KKT-punkt till Problem 2. .... (3p)

(d) Avgör slutligen om någon eller några av de fyra punkter är en garanterat *globalt* optimal lösning till något av problemen.
Motivera svaret ordentligt. Kända satser får användas. .... (2p)

Lycka till!