KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Måndag 18 aug 2014 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Betrakta följande LP-problem som vi kallar P.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{minimera} \quad \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ & \text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Av det speciella utseendet på matrisen $\mathbf{A}$ följer att problemet P i själva verket är ett minkostnadsflödesproblem. Rita motsvarande nätverk och verifiera därefter att $\hat{\mathbf{x}} = (15, 0, 10, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ är en optimal lösning till P. Finns det någon mer optimal lösning till P? Bestäm i såfall en sådan. .... (5p)

(b) I denna deluppgift är $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \\ 64 & 128 & 256 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för vart och ett av följande fyra underrum:
$\mathcal{N}(\mathbf{B})$, $\mathcal{N}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}})$, $\mathcal{N}(\mathbf{B})^{\perp}$ och $\mathcal{N}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}})^{\perp}$, dvs nollrummen till $\mathbf{B}$ och $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$, samt ortogonala komplementen till dessa båda nollrum.
För vilket värde på konstanten b ligger vektorn $(1, b, 1)^{\mathsf{T}}$ i $\mathcal{N}(\mathbf{B})$? .... (4p)

2. Denna uppgift handlar om följande LP-problem på så kallad *allmän form*:

$$
\begin{aligned}
\text{P:}\quad \text{minimera}\quad & x_3 \\
\text{då}\quad & x_1 - x_2 + x_3 \ge 0, \\
& x_2 + x_3 \ge 0, \\
& x_1 + x_2 = 3, \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \text{ "fri" (dvs ej teckenbegränsad).}
\end{aligned}
$$

(a) Överför problemet till så kallad *standardform*, dvs till ett problem med likhetsbivillkor och teckenbegränsade (icke-negativa) variabler. (Ledning: Den fria variabeln x_3 kan skrivas som differensen mellan två teckenbegränsade variabler.) . . . . (2p)

(b) Visa med valfri metod att följande lösning är optimal till problemet P: $\hat{x}_1 = 2,\ \hat{x}_2 = 1,\ \hat{x}_3 = -1.$ . . . . (5p)

(c) Formlera det duala LP-problemet D till problemet P, och bestäm en optimal lösning till detta duala problem D. Kontrollera även att optimalvärdena är lika för P och D. . . . . (3p)

3. Denna uppgift handlar om kvadratisk optimering. Låt

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_3 - 3x_3x_1 + 10x_1 + 20x_2 + 30x_3,$$

där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in I\!R^3$.

(a) Avgör om det finns någon globalt optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor. Bestäm i såfall en sådan optimal lösning. . . . . . (4p)

(b) Avgör med hjälp av en nollrumsmetod om det finns någon globalt optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret att $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Bestäm i såfall en sådan optimal lösning. . . . . (6p)

4. Betrakta följande ickelinjära funktion, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T} \in I\!R^2$:

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} \;-\; 0.3\,x_1 \;-\; 0.4\,x_2.$$

(a) Utför en fullständig iteration med Newtons metod för att minimera $f(\mathbf{x})$. Starta i punkten $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0)^\mathsf{T}$. . . . . (4p)

(b) Är f en konvex funktion på hela $I\!R^2$? Motivera svaret ordentligt. . . . . . . (2p)

(c) Bestäm (analytiskt) en globalt optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor. . . . . (4p)

5. Betrakta följande optimeringsproblem med tre variabler och två olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-x_1} + \frac{4}{1-x_2} + \frac{9}{1-x_3} \\ \text{då} \quad & g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} - 3 \le 0, \\ & g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 0.5 \le 0. \end{aligned}$$

(a) Ställ upp KKT-villkoren i detalj för problemet. .... (1p)

(b) Till dessa KKT-villkor finns faktiskt minst en lösning $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ sådan att det första av bivillkoren ovan är uppfyllt med likhet medan det sista är uppfyllt med strikt olikhet, dvs $g_1(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ och $g_2(\hat{\mathbf{x}}) < 0$.
Bestäm en sådan lösning $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ till KKT-villkoren. .... (5p)

(c) Är $\mathbf{x}$-delen av din ovan bestämda KKT-lösning, dvs $\hat{\mathbf{x}}$, en globalt optimal lösning till problemet? Motivera. .... (2p)

(d) Finns det några andra lösningar till KKT-villkoren än den lösning $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ som du bestämde ovan? Motivera. .... (3p)

Lycka till!