KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Fredag 3 juni 2016 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. I hela denna uppgift är matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ givna av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ -50 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

(a) Låt vektorn $\mathbf{c}$ ges av $\mathbf{c} = (2, 4, 3, 1)^{\mathsf{T}}$, och betrakta LP-problemet:

$$\text{minimera } \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \ \text{ då } \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \ \text{ och } \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Det framgår av den speciella strukturen på matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ att detta LP-problem kan tolkas som ett balanserat minkostnadsflödesproblem i ett visst nätverk. Illustrera detta nätverk i en figur, och visa med valfri metod att $\hat{\mathbf{x}} = (50, 0, 30, 10)^{\mathsf{T}}$ och $\tilde{\mathbf{x}} = (20, 30, 0, 40)^{\mathsf{T}}$ båda är optimala lösningar till LP-problemet. ....(5p)

(b) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ vara enligt ovan.
Bestäm dels en vektor $\bar{\mathbf{x}}$ som uppfyller $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, dels en matris $\mathbf{Z}$ vars kolonner utgör en bas för nollrummet till $\mathbf{A}$.

Det är välkänt från kursen att då är vektorn $\mathbf{x}$ en lösning till $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om och endast om $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v}$ med lika många komponenter som antalet kolonner i $\mathbf{Z}$.

Använd detta för att bestämma en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_2, x_4)^{\mathsf{T}}$ som uppfyller både $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $x_j \geq 15$ för $j = 1, 2, 3, 4$. ....(4p)

2. Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$\begin{array}{lrl} \text{P:} & \text{minimera} & -5x_1 - 8x_2 - 5x_3 \\ & \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 60, \\ & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 90, \\ & & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5. \end{array}$$

(a) Använd simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning.
Starta med x_4 och x_5 som basvariabler. .... (6p)

(b) Formulera det motsvarande duala LP-problemet D.
Illustrera detta duala problem D i en noggrann figur
och bestäm grafiskt en optimal lösning till D. .... (3p)

(c) Formulera komplementaritetsvillkoren för P, och verifiera noggrant
att dessa villkor är uppfyllda av dina lösningar till P och D ovan. .... (2p)

3. Man har mätt avståndet till en punkt P med okända koordinater (x_1, x_2) från var och en av fyra punkter med de kända koordinaterna (2, 0), (0, 2), (−2, 0) och (0, −2). De fyra uppmätta avstånden blev i tur och ordning följande: 1, 1, 3 och 3.

Det betyder att om mätningarna vore exakta så skulle de sökta koordinaterna (x_1, x_2) erhållas som lösningen till följande ickelinjära ekvationssystem:

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$ är vektorn med de sökta koordinaterna och funktionerna h_i ges av

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 0)^2 - 1, \\ h_2(\mathbf{x}) &= (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 2)^2 - 1, \\ h_3(\mathbf{x}) &= (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 0)^2 - 9, \\ h_4(\mathbf{x}) &= (x_1 - 0)^2 + (x_2 + 2)^2 - 9. \end{aligned}$$

Det är enkelt att visa (men det behöver inte du göra) att detta ekvationssystem inte har någon lösning, så då vill man i stället lösa följande ickelinjära minsta-kvadratproblemet i variabelvektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$, med funktionerna h_i enligt ovan.

$$\text{minimera} \quad f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(h_1(\mathbf{x})^2 + h_2(\mathbf{x})^2 + h_3(\mathbf{x})^2 + h_4(\mathbf{x})^2),$$

(a) Genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0\,,\,0)^\mathsf{T}$.
Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. ...... (6p)

(b) Avgör om det (för detta specifika exempel) gäller att funktionen f ovan är en *konvex* funktion på hela $\mathbb{R}^2$. .... (4p)

4. Låt i denna uppgift $f : I\!R^3 \to I\!R$ vara den kvadratiska funktionen definierad av

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1.$$

(a) Använd en *nollrumsmetod* för att *minimera* $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret att

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Visa sedan att din erhållna optimallösning $\hat{\mathbf{x}}$, tillsammans med en viss lagrangemultiplikator u, uppfyller Lagrangevillkoren för problemet. Ange även värdet på u. . . . . (6p)

(b) Antag nu att man i stället vill *maximera* $f(\mathbf{x})$ under samma bivillkor som ovan (dvs $x_1 + x_2 + x_3 = 1$).
Visa att det inte finns någon optimal lösning till detta maximeringsproblem.
Bestäm också en vektor $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^\mathsf{T}$ som dels uppfyller att $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 1$, dels har ett målfunktionsvärde $f(\tilde{\mathbf{x}})$ som är $> 10^{12}$. . . . (4p)

5. I följande ickelinjära optimeringsproblem P med olikhetsbivillkor är talet c (som multiplicerar x_3^4 i målfunktionen) en konstant.

$$\begin{array}{rl} \text{P:} \quad \text{minimera} & x_1^4 + x_2^4 + cx_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 + x_3 \geq 4, \\ & x_2 + x_3 \geq 4. \end{array}$$

(a) Ställ upp KKT-villkoren i detalj för detta problem P. (1p)

(b) Finns det några värden på konstanten c för vilka $\mathbf{x} = (3, 3, 1)^\mathsf{T}$ är en globalt optimal lösning till P? Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c. . . . . . (3p)

(c) Finns det några värden på konstanten c för vilka $\mathbf{x} = (1, 3, 3)^\mathsf{T}$ är en globalt optimal lösning till P? Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c. . . . . . (3p)

(d) Finns det några värden på konstanten c för vilka $\mathbf{x} = (2, 2, 2)^\mathsf{T}$ är en globalt optimal lösning till P? Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c. . . . . . (3p)

Frivillig räknehjälp: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Lycka till!