Övning 1 i komplex analys

IDAG: Kap. 1.4: – Heltalsexponenter och rationella exponenter av komplexa tal

Kap 1.5: – Mängder i det komplexa talplanet

Tal: 1.4.1, 1.4.9, 1.4.17, 1.5.5, 1.5.22, 7, 12 (Problem till tentamen del B)

Nästa gång: Kap. 2.2–2.5:

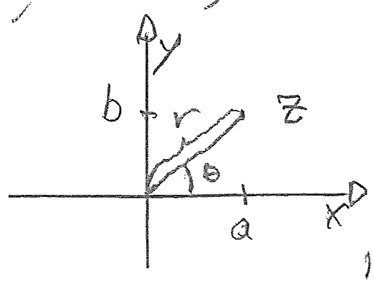
- Gränsvärden och kontinuitet
- Derivator
- Analytiska funktioner
- Harmoniska funktioner

$\boxed{\text{s. 55–70}}$

Tal: 2.3.3, 2.3.5, 2.3.12, 2.3.14, 2.3.19, 2.4.4, 2.4.6, 2.4.18, 2.5.12, 2.5.13, 2.5.19

Notation

$$z = a+ib = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \cancel{r\angle\theta} = \cancel{r\,\mathrm{cis}\,\theta}$$



För MAPLE (bl.a.)

progdist.ug.kth.se

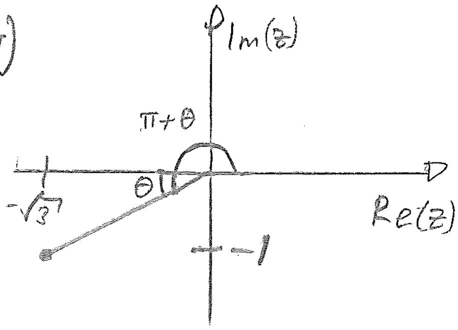
1.4.1 Uttryck $(-\sqrt{3}-i)^7$ på formen $a+ib$ och $re^{i\theta}$.

*

Lösningsförslag

$$(-\sqrt{3}-i)^7 = \Big(\underbrace{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}_{=2}\Big)^7 e^{i7(\theta+\pi)}$$

$$= \left\{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\right\} = 2^7 e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+7\pi\right)} =$$



$$= 2^7 e^{i\left(8\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = 2^7\left(\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^7\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^7 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2^6\sqrt{3} + i\,2^6$$

Svar: $(-\sqrt{3}-i)^7 = 128\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$= 64\sqrt{3} + i\,64$$

*

1.4.9 Ge alla värden på $(9i)^{\frac{1}{2}}$ på formen $a+ib$.

Lösningsförslag

$$9i = 9e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (9i)^{\frac{1}{2}} = \left(9e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(9e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$$

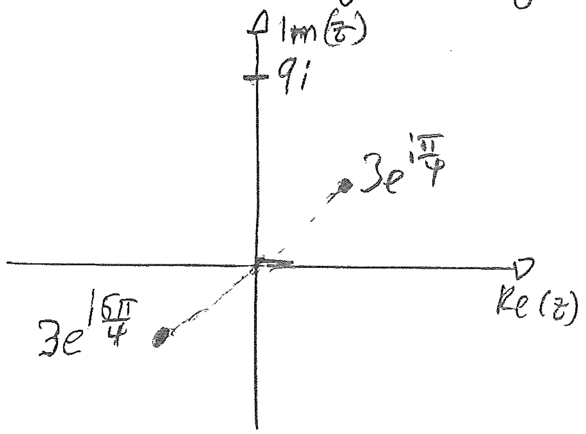
För $k=0$ fås

$$3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

medan $k=1$ ger

$$3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$k \geq 2$ ger inga andra värden



Svar: $(9i)^{\frac{1}{2}}$ har värdena $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

1.4.17 Ge alla värden på $(1+i)^{6/2}$ på formen $a+ib$.

*

Lösningsförslag

$$(1+i)^{6/2} = (1+i)^3 = \{\text{Binomialsatsen}\} =$$

$$= 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3 =$$

$$= 1 - 3 + i(3-1) = -2 + i2$$

Svar: $-2+i2$

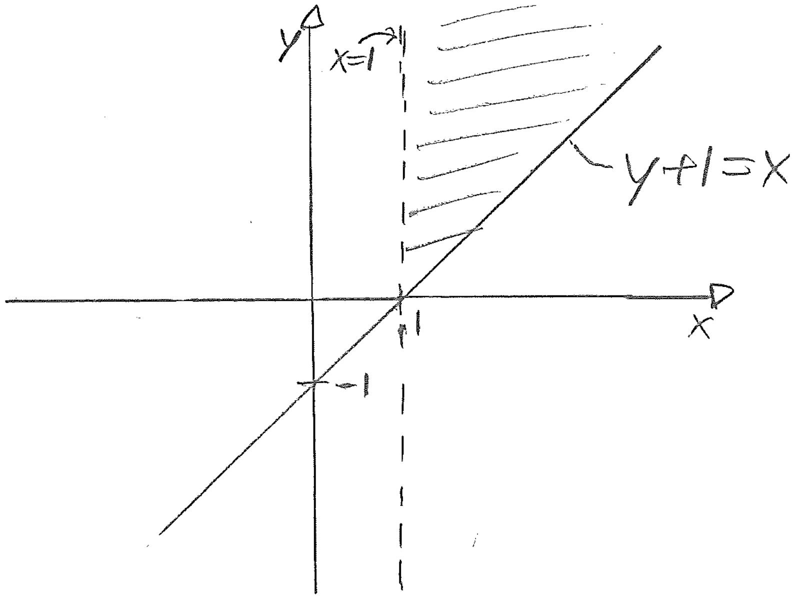
*

1.6.5* Rita upp området som ges av mängden $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im}(z+i)\}$

——— * ———

Lösningsförslag

Låt $x := \operatorname{Re}(z)$, $y := \operatorname{Im}(z)$



$\operatorname{Im}(z+i) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(i) = y+1$

$1 < x \Leftrightarrow z$ ligger strikt till höger om linjen $x=1$

$x \leq y+1 \Leftrightarrow z$ är till vänster om och sammanfaller med linjen $x = y+1$

Svar: Det markerade området i figuren ovan visar då båda olikheterna är uppfyllda.

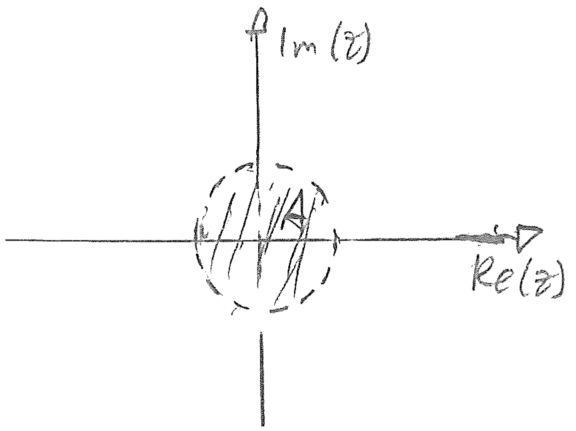
——— * ———

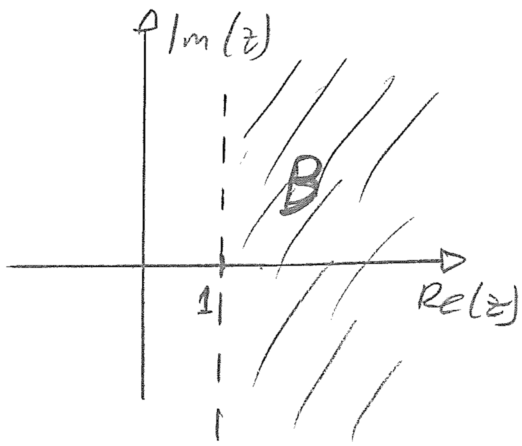
1.5.22 Om $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ och $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$, rita upp $A \cap B$.

*

Lösningsförslag

Med $A \cap B$ menas mängden av alla punkter som finns i både A och B.





Svar: Vi ser att ingen punkt finns i både A och B, d.v.s. $A \cap B = \emptyset$.

*

7 (Problem till tentamen del B)

Bevisa likheten

$$\left|\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0}\right| = 1 \quad \text{för } |z| = 1$$

Lösningsförslag

Om $|z| = 1$ så är $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$

$\Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. Dessutom är $|\bar{z}| = |z| \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Detta ger

$$\frac{|a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|}{|\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0|} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{1/|\bar{z}|^n}_{=1}} \frac{|a_0 + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|}{|\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0|} =$$

$$= \frac{|a_0 + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|}{|z^{-n}(\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0)|} = \quad \text{v.g.v.}$$

$$= \frac{|a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|}{|\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z^{-1} + \ldots + \bar{a}_0 z^{-n}|} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{z} = \bar{z} \right\}$$

$$= \frac{|\overbrace{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}^{=: w}|}{|\underbrace{\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} \bar{z} + \ldots + \bar{a}_0 \bar{z}^n}_{= \bar{w}}|}$$

$$= \frac{|w|}{|\bar{w}|} = 1$$ vilket skulle visas.

$f'(\theta) \geq 0$ då $\theta > \theta_0$, så

är $f(\theta) \geq 0$ för alla $\theta \in \mathbb{R}$.

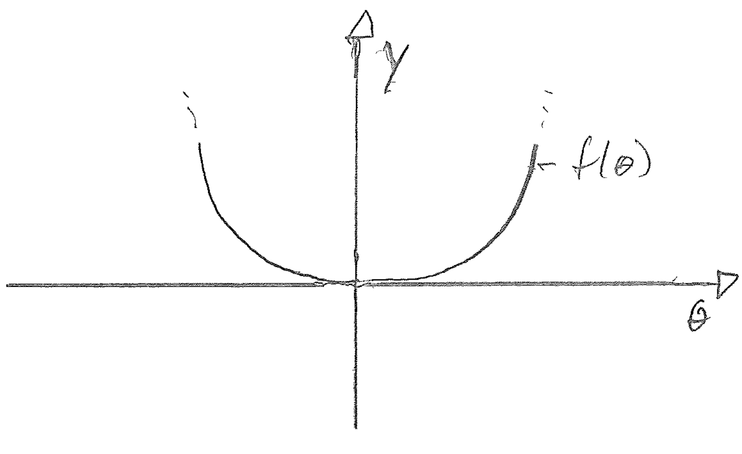
I vårt fall är $\theta_0 = 0$ ty

$f(0) = 0^2 + 2(1 - \cos 0) = 0$ och

$$f'(\theta) = 2(\theta - \sin\theta) \begin{cases} \leq 0, & \theta < 0 \\ \geq 0, & \theta > 0 \end{cases}$$

Därmed är det bevisat att

$$|e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$



Slut övning 1

12 (Problem till tentamen del B)

Visa olikheten

$$|e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2}|\leq|\varphi_1-\varphi_2|,\quad \varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R} \quad (1)$$

---

*

Lösningsförslag

$$(1)\iff |e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2}|^2\leq|\varphi_1-\varphi_2|^2$$

$$|e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2}|^2=\underbrace{|e^{i\varphi_2}|^2}_{=1}|e^{i\overbrace{(\varphi_1-\varphi_2)}^{=:\theta}}-1|^2=$$

$$=|\cos\theta+i\sin\theta-1|^2=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=$$

$$=\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta).$$

Låt $f(\theta):=|\varphi_1-\varphi_2|^2-2(1-\cos\theta)=\theta^2-2(1-\cos\theta)$

Vi vill visa $f(\theta)\geq 0$ för alla $\theta\in\mathbb{R}$

Generellt gäller det att om

$f(\theta_0)\geq 0$ för något θ_0 och

$f'(\theta)\leq 0$ då $\theta<\theta_0$ samt

v.g.v.