Övning 10 i komplex analys

Förra gången:

Kap 6.12: – Argumentprincipen
– Rouchés sats

Kap 8.1–8.3: – Konforma avbildningar

—— * ——

IDAG:

Kap 8.4: Möbiusavbildningar

Tal: 8.4: 14, 16, 18, 20, 24, 26

—— * ——

8.4.14 och 8.4.16

Vad är bilden av följande kurvor om avbildningen är $w = \frac{z+1}{z-1}$?

a) $|z| = 1$ b) $|z+1| = 2$

*

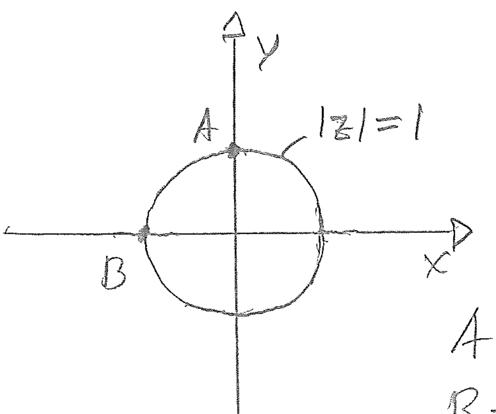
Lösningsförslag

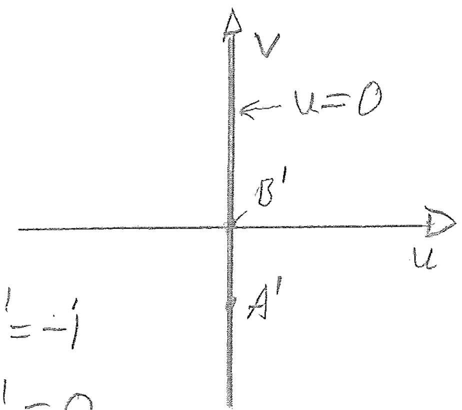
a) Vi ser att $z = 1$ (som ligger på cirkeln $|z| = 1$) avbildas på $w = \infty$.

Därmed är bilden av $|z| = 1$ en linje eftersom w är en Möbiusavbildning.

För $z = -1$ fås $w = \frac{-1+1}{-1-1} = 0$

och $z = i$ ger $w = \frac{i+1}{i-1} = -i$





$A = i \xrightarrow{w} A' = -i$

$B = -1 \xrightarrow{w} B' = 0$

v.g.v.

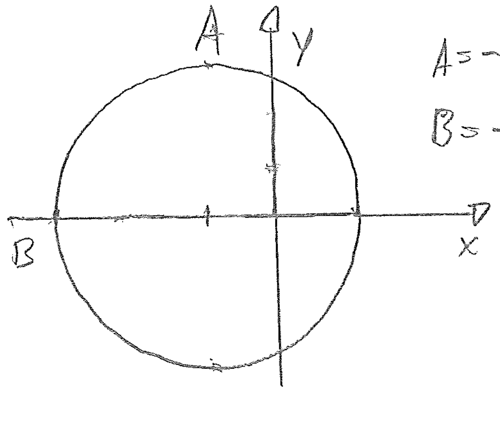
Om $w = u + iv$ fås

<u>Svar a:</u> Bilden av $|z| = 1$ är linjen $u = 0$ (se figur på föregående sida).

---

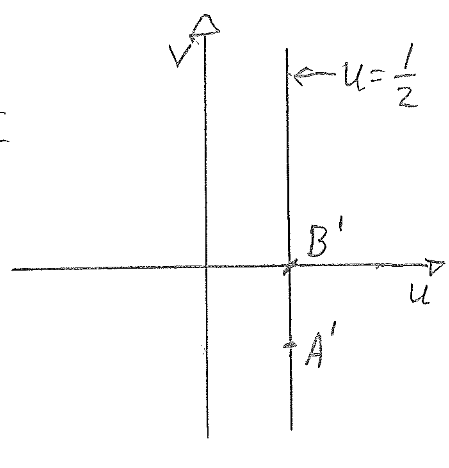
b) Punkterna $z = 1$, $z = -3$ och $z = -1+2i$ ligger på cirkeln $|z+1| = 2$, och avbildas på $w = \infty$, $w = \frac{-3+1}{-3-1} = \frac{1}{2}$ respektive

$w = \frac{-1+2i+1}{-1+2i-1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, d.v.s. bilden är en linje.



$A = -1+2i \xrightarrow{w} A' = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$B = -3 \xrightarrow{w} B' = \frac{1}{2}$



<u>Svar b:</u> Bilden av $|z+1| = 2$ är linjen $u := \mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$ (se figur ovan).

8.4.18

Vad är bilden av $D=\{z\in\mathbb{C}: |z-1|<1\}$ om avbildningen är $w=\frac{z-1}{z}$?

---- * ----

Lösningsförslag

w är en Möbiusavbildning, och avbildar linjer och cirklar på antingen linjer eller cirklar. Vi betraktar därför bilden av randen $|z-1|=1$ till D.: $z=0$, $z=2$ och $z=1+i$ avbildas på $w=\infty$, $w=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ respektive

$$w=\frac{1+i-1}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}.$$ Därmed avbildas

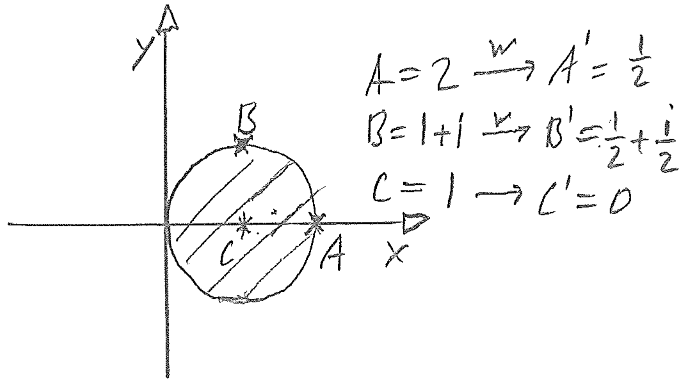
$|z-1|=1$ på $u=\frac{1}{2}$ om $w=u+iv$. Då $z=1$ som ligger i D avbildas på

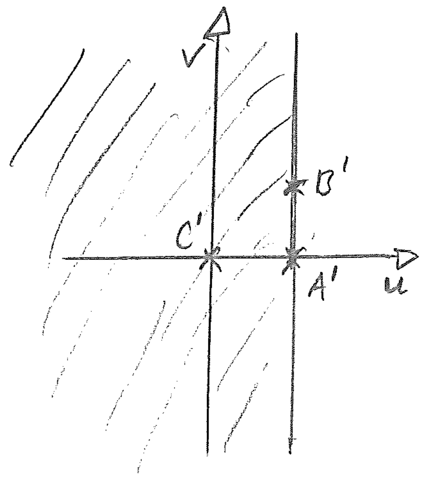
$w=\frac{1-1}{1}=0$ som ligger till

v.g.v.

vänster om linjen $u = \frac{1}{2}$, måste

D avbildas på $u < \frac{1}{2}$.





<u>Svar:</u> Den öppna disken $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$

avbildas på halvplanet $u < \frac{1}{2}$.

8.4.20

Vad är bilden av $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < Re(z) < 2\}$

om avbildningen är $w = \frac{z}{z-1}$?

*

Lösningsförslag

w är en Möbiusavbildning så det

lönar sig att betrakta bilden av linjerna

$Re(z)=1$ och $Re(z)=2$ som utgör

randen för D, då vi vet att

dessa avbildas på linjer eller cirklar.

$z=1$, $z=1+i$ och $z=1-i$ ligger på

linjen $Re(z)=1$ och avbildas på

$w=\infty$, $w=\frac{1+i}{1+i-1}=1-i$ respektive $w=\frac{1-i}{1-i-1}=1+i$.

Detta visar att bilden av $Re(z)=1$

är linjen $u=Re(w)=1$

v.g.v.

$z=2$ ligger på $Re(z)=2$ och avbildas på $w=\frac{2}{2-1}=2$. Dessutom är $w=\frac{z}{z-1}$ begränsad på denna linje så bilden av $Re(z)=2$ är en cirkel.

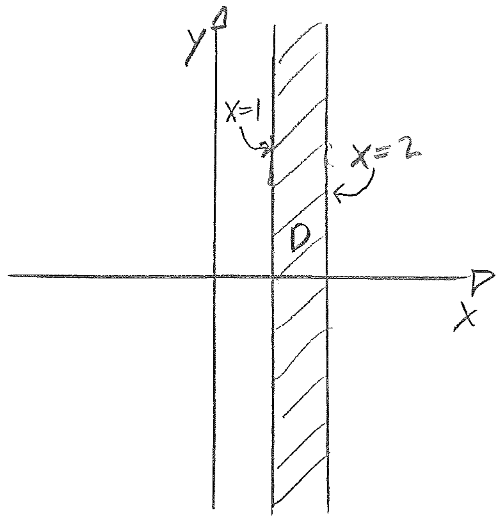
Då $w=\frac{z}{z-1}\to 1$ när $|z|\to\infty$ ser vi att cirkeln kommer att tangera linjen $Re(w)=1$, ty $Re(w)=Re\left(\frac{z}{z-1}\right)=$

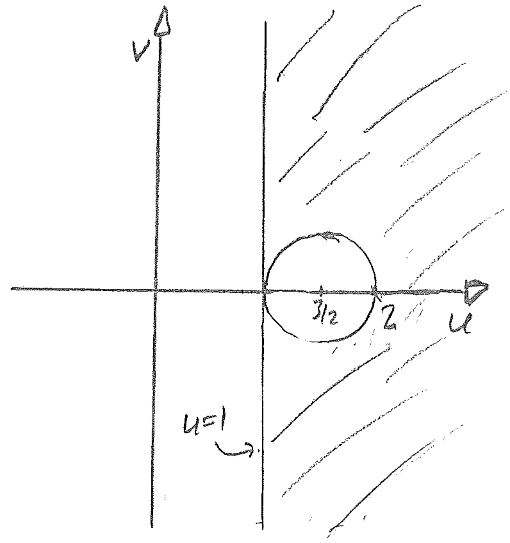
$$=Re\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=1+Re\left(\frac{\bar{z}-1}{(z-1)(\bar{z}-1)}\right)=1+Re\left(\frac{\bar{z}-1}{|z|^2+1-\underbrace{(z+\bar{z})}_{=2Re(z)=4}}\right)=$$

$$=1+\frac{\overbrace{Re(\bar{z}-1)}^{=1}}{|z|^2-3}=1+\frac{1}{|z|^2-3}>1 \quad \text{då} \quad |z|^2\geq(Re(z))^2=4$$

Därför avbildas $Re(z)=2$ på cirkeln $|w-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2}$, och D avbildas på området som begränsas av denna cirkel och $Re(w)=1$

v.g.v.





Svar: Bilden av $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \mathrm{Re}(z) < 2\}$

är $\{w \in \mathbb{C} ; |w - \frac{3}{2}| > 1$ och $\mathrm{Re}(w) > 1\}$.

8.4.24

a) Hitta Möbiusavbildningen som avbildar

$z_1 = i$, $z_2 = -1$ och $z_3 = -i$ på

$w_1 = 1+i$, $w_2 = \infty$ respektive $w_3 = 1-i$

b) Vad är bilden av $|z|>1$ under denna avbildning?

*

Lösningsförslag:

a) Då $w_2 = \infty$ ger invariansen av korskvoten att

$$\frac{w_3 - w}{w_1 - w} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-i-w}{1+i-w} = \frac{(i-(-1))((-i)-z)}{(i-z)((-i)-(-1))}$$

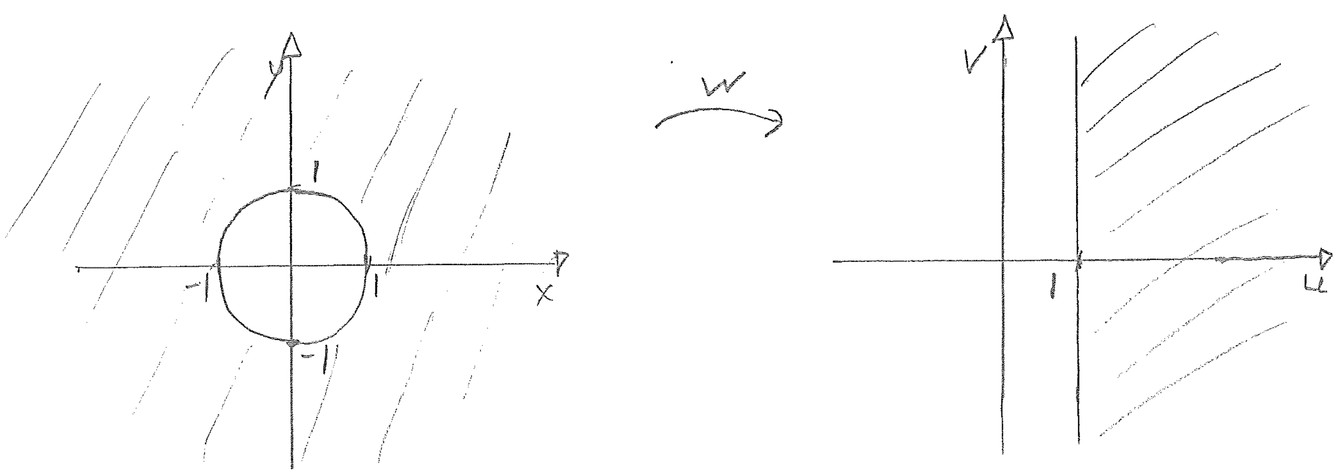
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{efter en del} \\ \text{beräkningar} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Svar a: $w = \dfrac{2z}{z+1}$

*

v.g.v.

b) Punkterna z_1, z_2 och z_3 ligger på cirkeln $|z|=1$ som utgör randen till $|z|>1$. Eftersom dessa avbildas på $w_1=1+i$, $w_2=\infty$ respektive $w=1-i$ ser vi att bilden denna cirkel är linjen $\mathrm{Re}(w)=1$. Då till exempel $z=2$ ligger i $|z|>1$ och avbildas på $w=\frac{2\cdot 2}{2+1}=\frac{4}{3}$ som ligger till höger om linjen $\mathrm{Re}(w)=1$ får vi

Svar b) Bilden av $|z|>1$ är $\mathrm{Re}(w)>1$.



*

8.4.26

a) Hitta Möbiusavbildningen som avbildar $z_1 = i$, $z_2 = -i$ och $z_3 = 1$ på $w_1 = 1$, $w_2 = -i$ respektive $w_3 = -1$.

b) Vad är bilden av $|z| < 1$ under denna avbildning?

*

Lösningsförslag

a) Invarians av korskvoter ger

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z)(z_3 - z_2)} = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w)}{(w_1 - w)(w_3 - w_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(i-(-i))(1-z)}{(i-z)(1-(-i))} = \frac{(1-(-i))((-1)-w)}{(1-w)((-1)-(-i))}$$

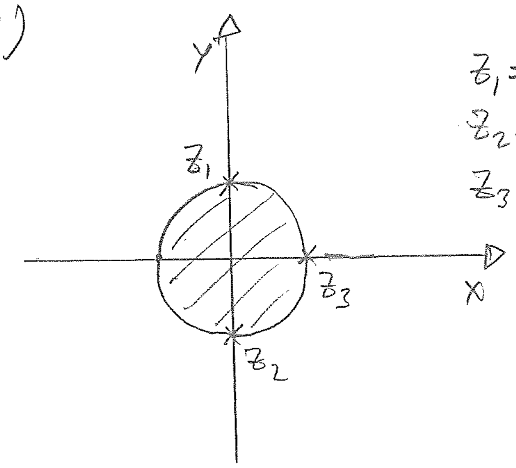
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Efter en del} \\ \text{beräkningar} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$

Svar a: $w = \dfrac{z - 2 - i}{(1+2i)z - i}$

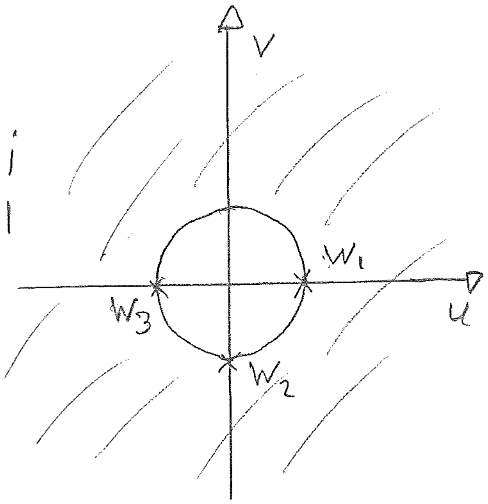
*

v.g.v.

b)



$z_1=i \to w_1=1$
$z_2=-i \to w_2=-i$
$z_3=1 \to w_3=-1$



Punkterna z_1, z_2 och z_2 ligger på cirkeln $|z|=1$ som utgör randen till $|z|<1$, och då avståndet mellan w_2 och w_3 är lika långt som avståndet mellan w_2 och w_1 ser vi att denna cirkel avbildas på $|w|=1$. Dessutom avbildas $z=0$ på $w=\frac{0-2-i}{(1+2i)\cdot 0-i}=1-2i$

som ligger utanför cirkeln $|w|=1$.

Vi får därför

Svar b: Bilden av $|z|<1$ är $|w|>1$.

*