Övning 2 i komplex analys

Förra gången: Kap 1.4–1.6:

- Heltalsexponenter och rationella exponenter av komplexa tal
- Mängder i $\mathbb{C}$.

IDAG: Kap 2.2–2.5:

- Gränsvärden och kontinuitet
- Derivator
- Analytiska funktioner
- Harmoniska funktioner

Tal: 2.3.3, 2.3.14, 2.3.19, 2.4.6, 2.5.12, 2.5.13

Nästa gång:

Kap 3.1: Exponentialfunktionen
3.2: Trigonometriska funktioner
3.4–3.5: Logaritmfunktionen
3.6: Komplexa exponenter
3.8: Grensnitt

$\boxed{\text{s. 99–113, 115–133, 138–146}}$

Cauchy–Riemanns ekvationer

Om $f(z) := u(x,y) + i v(x,y)$ så är ett nödvändigt villkor för deriverbarhet att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Om u, v och de partiella derivatorna dessutom är kontinuerliga, är villkoret även tillräckligt. f' kan ges av

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

*

Analytisk funktion: f är analytisk om f är deriverbar i en omgivning av z_0.

Om f är analytisk i hela $\mathbb{C}$, så är f en hel funktion.

*

Harmonisk funktion

$u(x,y)$ är en harmonisk funktion om

$$\Delta u := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.3.3 Visa att $\bar{z}$ inte är deriverbar.

Lösningsförslag

Låt $f(z) := \bar{z}$.

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \left\{ \begin{array}{l} z = x+iy \\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y \\ = \Delta r e^{i\Delta\theta} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{x-iy+\Delta x - i\Delta y - (x-iy)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta r e^{-i\Delta\theta}}{\Delta r e^{i\Delta\theta}}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} e^{-i2\Delta\theta},$$

v.g.v.

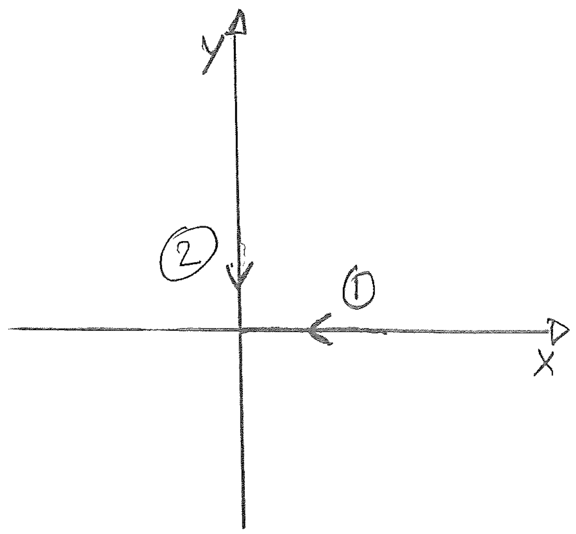
Om vi låter Δz närma sig 0 längs ① (se figur) är $\Delta\theta = 0$,

så $\lim_{\Delta z \to 0} e^{-2i\Delta\theta} = \lim_{\Delta z \to 0} e^0 = \underline{\underline{1}}$.

Om vi emellertid låter Δz närma sig 0 längs ②, är $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ vilket

ger $\lim_{\Delta z \to 0} e^{-2i\Delta\theta} = \lim_{\Delta z \to 0} e^{-i\pi} = \underline{\underline{-1}}$

Eftersom gränsvärdet beror på hur vi närmar oss



0 existerar det inte. Med andra ord är $f(z) = \bar{z}$ inte deriverbar någonstans. V.S.V.

———— * ————

2.3.14 Var är $f(z) := (x-1)^2 + iy^2 + z^2$ deriverbar.

*

Lösningsförslag

Eftersom z^2 är ett polynom i z, är z^2 analytisk. Det räcker därmed att betrakta $(x-1)^2 + iy^2$.

Cauchy-Riemanns ekvationer (C-R) är ett <u>nödvändigt</u> villkor. Låt därför

$$g(z) := (x-1)^2 + iy^2 = u(x,y) + iv(x,y)$$

där $u(x,y) = (x-1)^2$, $v(x,y) = y^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-1) = \{(C\text{-}R)\} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x-1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \{(C\text{-}R)\} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

V.g.v.

Ekvation (2) är uppfylld i hela $\mathbb{C}$ medan (1) endast är uppfylld på linjen $y=x-1$. Då $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ dessutom är kontinuerliga (i hela $\mathbb{C}$), ger Sats 3 s. 68 att uppfyllandet av (C-R) även är ett <u>tillräckligt</u> villkor för deriverbarhet.

<u>Svar:</u> f är deriverbar längs linjen $y=x-1$.

För övrigt är $f'(z)$ i dessa punkter

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+2z=2(x-1)+i\cdot 0+2z=$$
$$=2(z+\mathrm{Re}(z)-1).$$

— * —

2.3.19 Visa att om $f'(z_0)$ existerar, då är f kontinuerlig i z_0.

——— * ———

Lösningsförslag

Vi vill visa att $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \cdot \Delta z = 0 \qquad (1)$$

VL i (1) kan, med hjälp av Sats 1, s. 59 som

$$\underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}_{= f'(z_0)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \Delta z}_{=0} = 0,$$

vilket skulle visas.

——— * ———

2.4.6 a) Visa att

$f(z) := z(\cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y))$ är en hel funktion.

b) Vad är $f'(z)$ och $f'(i)$?

Lösningsförslag

Eftersom z är en hel funktion räcker det att visa att

$g(z) := \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

är hel då produkten av två hela funktioner är hel.

Cauchy-Riemanns ekvationer (C-R) ger, med $u(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$, $v(x,y) = -\sin(x)\sinh(y)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)\cosh(y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \text{ok!} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\cos(x)\sinh(y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y} & \text{ok!} \end{cases}$$

v.g.v.

Då u, v och de partiella derivatorna är kontinuerliga i hela $\mathbb{C}$, existerar $g'(z)$ i hela $\mathbb{C}$ och g är därför hel, och därmed även f. V.S.V.

---

b) Produktregeln ger

$$f'(z) = (z\,g(z))' = 1 \cdot g(z) + z \cdot g'(z).$$

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= -\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\sinh(y) + z(-\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y))$$

$$f'(i) = \cos(0)\cosh(1) - \sin(0)\sinh(1) + i \cdot (-\sin(0)\cosh(1) - i\cos(0)\sinh(1))$$

$$= \cosh(1) + \sinh(1)$$

<u>Svar b</u>: $f'(z) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\sinh(y) + z(-\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y))$

$f'(i) = \cosh(1) + \sinh(1)$

2.5.12

Hitta harmoniska konjugatet till $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$.

*

Lösningsförslag

Låt $u(x,y) := \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$. Vi vill hitta en funktion $v(x,y)$ så att $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ är analytisk.

Cauchy-Riemanns ekvationer, (C-R), ger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} = \{(C\text{-}R)\} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + g'(x) = \{(C\text{-}R)\} = -\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \text{v.g.v.}$$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$

Svar: Harmoniska konjugatet till $u(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ är

$$v(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + C$$

——— * ———

2.5.13 Visa att om $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är harmoniska så är $u+v$ harmonisk men inte nödvändigtvis uv och $e^u e^v$.

Lösningsförslag

En funktion $f(x,y)$ är harmonisk om $\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Eftersom derivering är en linjär operation ser vi att, om $\Delta u = 0$ och $\Delta v = 0$,

$$\Delta(u+v) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u+v) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = \Delta u + \Delta v = 0.$$

För uv får vi

$$\Delta(uv) = \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y^2} = \text{v.g.v.}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(u_x v + u v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y v + u v_y) =$$

$$= u_{xx} v + u_x v_x + u_x v_x + u v_{xx} + u_{yy} v + u_y v_y + u_y v_y + v_{yy} =$$

$$= \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{= \Delta u = 0} v + u \underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{= \Delta v = 0} + 2(u_x v_x + u_y v_y) =$$

$= 2(u_x v_x + u_y v_y)$ vilket är frånskilt noll i allmänhet. T.ex. för $u = v = x$ är $\Delta u = \Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) x = \frac{\partial}{\partial x} 1 + 0 = 0$ medan $\Delta(uv) = \Delta(x^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) x^2 = 2 \neq 0.$

För $e^u e^v$ får vi

$$\Delta(e^u e^v) = \Delta(e^{u+v}) = \{h := u + v\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^h + \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^h =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(h_x e^h) + \frac{\partial}{\partial y}(h_y e^h) = h_{xx} e^h + h_x^2 e^h + h_{yy} e^h + h_y^2 e^h =$$

$$= [\underbrace{(h_{xx} + h_{yy})}_{= \Delta h = 0} + h_x^2 + h_y^2] e^h = (h_x^2 + h_y^2) e^h$$

T.ex. $u = v = \frac{x}{2}$ ger $h_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1$ och $h_y = 0$ så $\Delta(e^u e^v) = (1 + 0) e^h = e^x \neq 0.$ V.S.V.

 Slut övning 2